



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

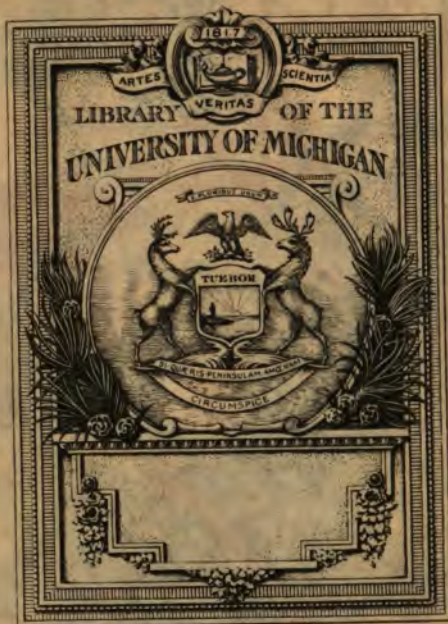
Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

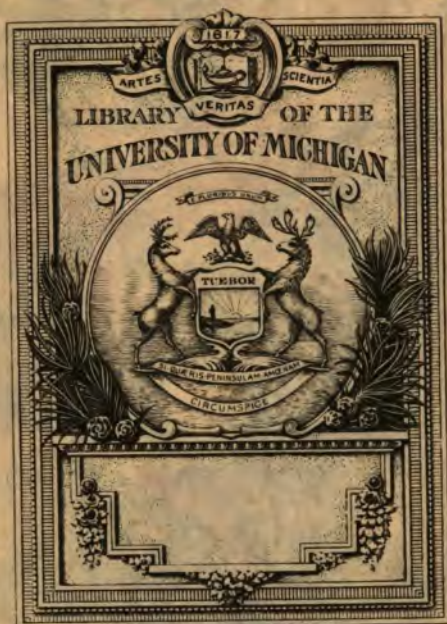
- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

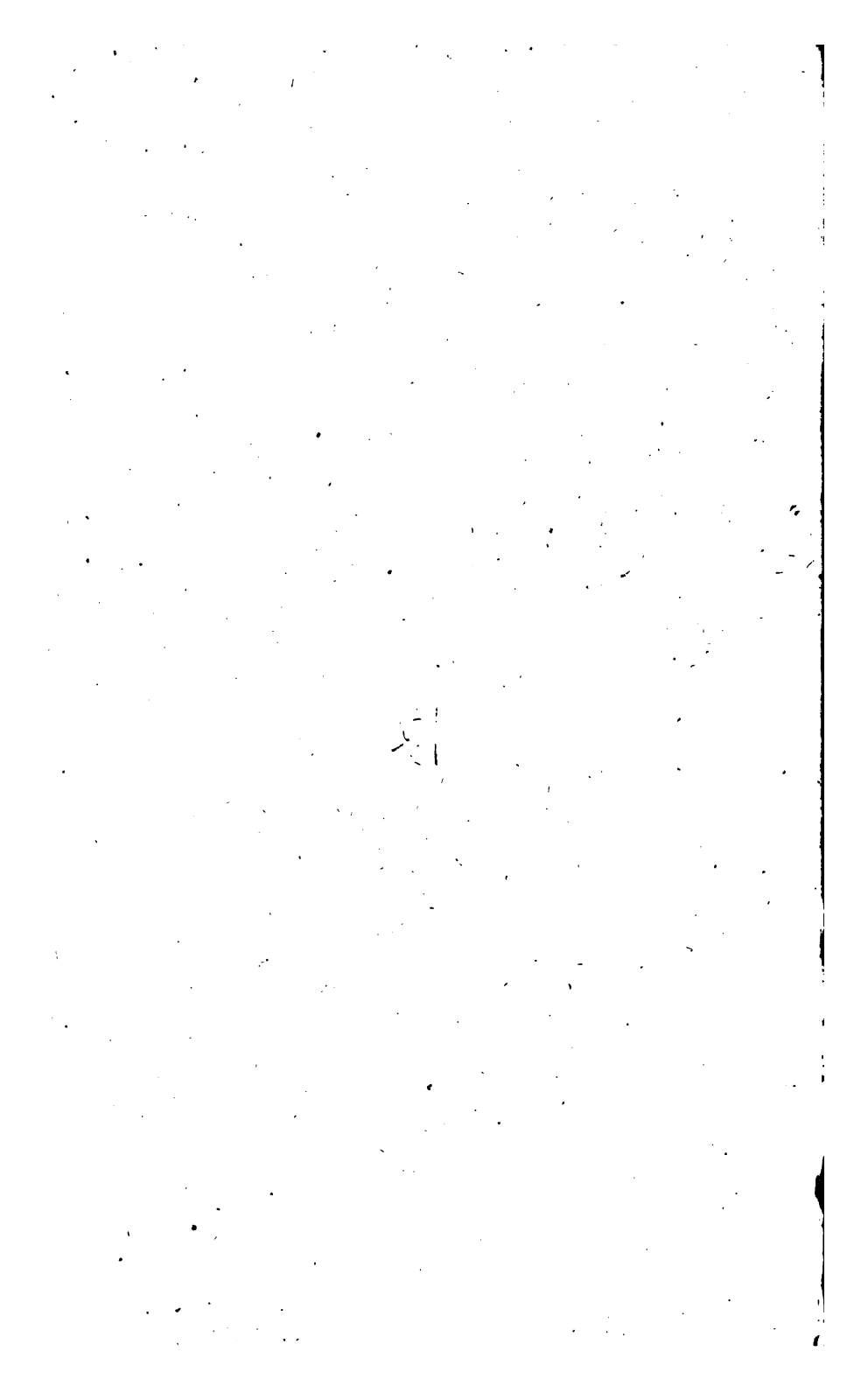
En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

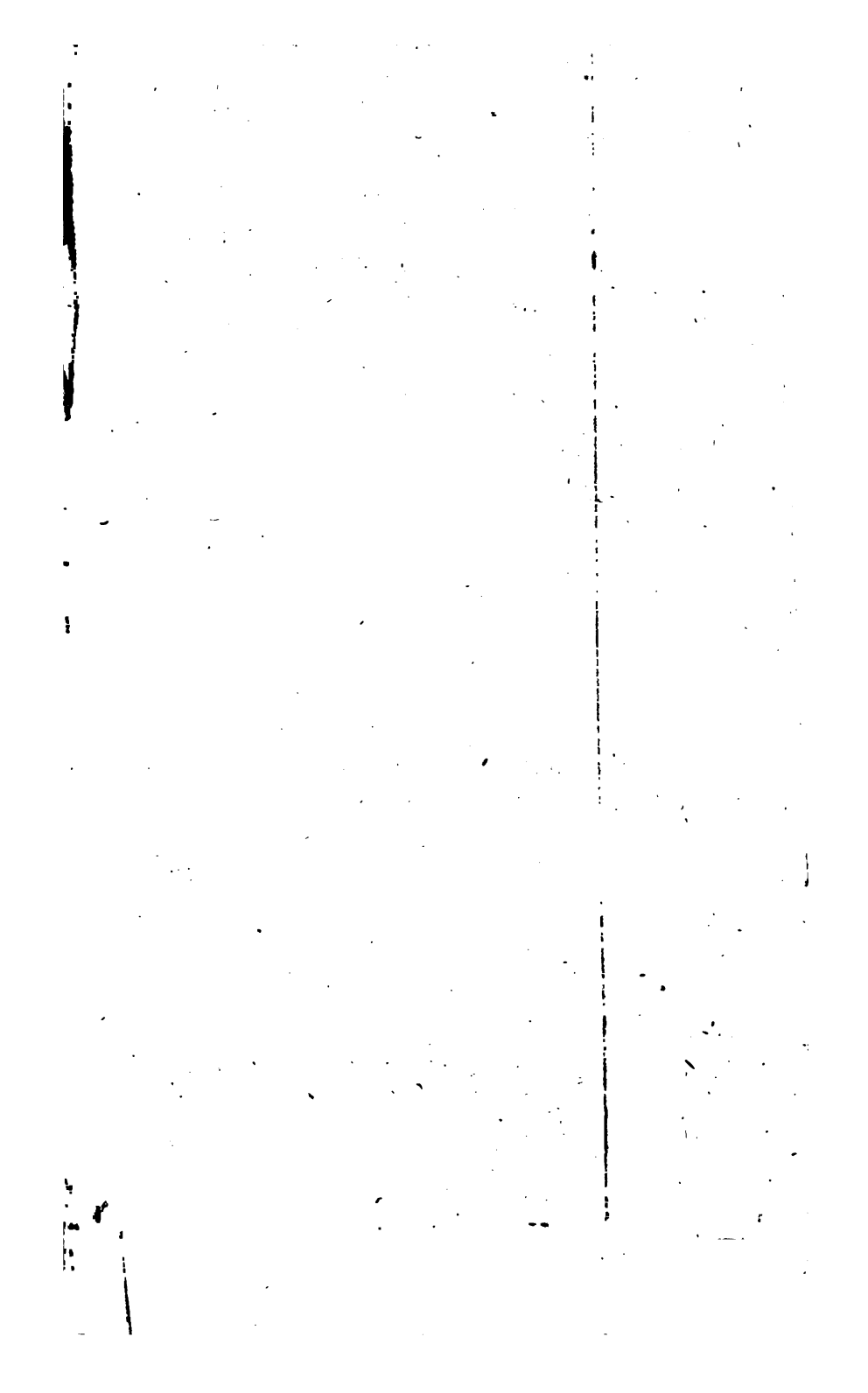












Nouvelles

Quadrature du
et Trisection de

Voyez Fig. 26



le mécanisme au cercle et au quarré, & la trisection de
l'angle, si fameux dans l'antiquité. (cachées jusqu'à
ce jour aux hommes, et découvertes en quarré du cercle
avec les quarrés inscrit et circonscrit)

M^r. de Méley, ami des sciences, pénétre de son testament une son
de cinquante mille écus en faveur de celui qui la dresse à M.M.
Présidents et Membres de l'Institut National,



NOUVELLE DÉCOUVERTE

Qui embrasse toute la Géométrie, qui donne la solution de ses plus grands problèmes, et qui va reculer les bornes de l'esprit humain,

O U

IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE DU CERCLE ET DU QUARRÉ,

Quadrature du Cercle, Trisection de l'Angle et de l'Arc, Duplication du Cube, etc.

MISE A LA PORTÉE DE CEUX QUI SONT LES MOINS INSTRUITS,

Et présentée à la première Classe de l'Institut National, en sa séance, du 30 fructidor an XII, qui en a ordonné le dépôt dans la Bibliothèque publique, et dont elle a fait faire ses remerciemens particuliers à l'Auteur par une lettre en date du 3 Vendémiaire, an XIII.

Présentée au Sénat, au Tribunal, et au Corps-Législatif, lequel en a fait mention honorable et ordonné le dépôt à sa bibliothèque le 20 pluviôse de l'an XIII.

PAR LAURENT POTIER DESLAURIÈRES,
Né au Mans, habitant de Périgné, Département des Deux-Sèvres.

Impossibilia, dum ignores;
Ubi cognoveris, facilia.

A P A R I S,

Chez DENTU, Imprimeur-Libraire, quay des Augustins, n.° 22,
et Palais du Tribunal, galerie de Bois, n.° 24.
Et au bureau du Journal d'affiches, rue d'Argenteuil, n.° 212.

Le 20 fructidor de l'an XII—1804.

A V E R T I S S E M E N T.

L'AUTEUR , en présentant son ouvrage à l'Institut national , a demandé qu'on nommât deux Commissaires pour en faire l'examen et le rapport. M. le Président lui a répondu qu'il y avoit un arrêté particulier de l'Académie des sciences , qui empêchait ses Membres de s'occuper de la découverte de la QUADRATURE DU CERCLE.

Le lecteur observera que tous les théorèmes et problèmes qui sont établis dans cet ouvrage , se trouvent liés le plus étroitement avec la solution géométrique de la *Quadrature* qui donne la mesure arithmétique. C'est pourquoi toutes les démonstrations deviennent les plus rigoureuses , soit en nombres , soit en lignes.

Libr.
Davis
1-11-44
49013

AVERTISSEMENT

DE L'AUTEUR.

IL est inutile, sans doute, de prévenir le lecteur que cet ouvrage a été imprimé à différentes reprises. Il s'en appercevra facilement de lui-même. Les circonstances m'ont forcé d'en agir de cette manière : j'attends de jour en jour le jugement de l'Institut, pour lui donner une nouvelle forme. Une révolution est donc opérée aujourd'hui dans les sciences. La *quadrature du cercle*, que tous les savants eux-mêmes regardoient comme une chimère, et dont on n'osoit prononcer les mots sans se couvrir de ridicule, va être enfin reconnue comme l'une des premières vérités de la nature.

Les problèmes de la trisection de l'angle et de l'arc, de la duplication du cube : ces problèmes, qui ont été cherchés vainement depuis plus de trois mille ans, sont enfin résolus.

Hélas ! que d'actions de grâces n'ai-je pas à rendre à Dieu, l'auteur de toute science ? Pythagore, pour remercier les Dieux de la découverte du quarré de l'hypothénuse égal aux quarrés de ses deux côtés, sacrifia en leur honneur cent bœufs. Pour moi, dès que la somme déléguée par le testament de M. De Méley, me sera remise, d'après le jugement de l'Institut national, je choisirai cent pauvres affligés, à chacun desquels je donnerai cent fr. pour remercier le Ciel de la faveur qu'il m'a accordée ; mais MM. de l'Institut diffèrent toujours depuis sept mois de rendre en public le

jugement qu'ils ont déjà porté en leur particulier sur ma découverte : faut-il donc qu'après des travaux les plus longs et les plus pénibles, qui honorent ma patrie, j'éprouve un pareil retard, qui me cause un si grand préjudice ? Cependant, le devoir de MM. de l'Institut, par la place qu'ils occupent, et par le dépôt qu'ils ont entre les mains, ne les oblige-t-il pas de prononcer ? qu'ils lisent cette lettre qu'un savant ministre de l'intérieur m'a fait l'honneur de m'écrire.

Paris, le 23 prairial an 5.

Le Ministre de l'Intérieur, au citoyen L. POTIER.

« J'ai reçu, citoyen, votre lettre et l'imprimé que vous
 » m'avez adressé ; le directoire exécutif m'a envoyé
 » aussi celle que vous lui avez fait parvenir, vous
 » m'apprenez que vous êtes décidé à venir soumettre
 » vous-même au jugement de l'Institut national, les dé-
 » couvertes importantes que vous annoncez ; je ne puis
 » qu'applaudir à ce projet. On ne sauroit douter que
 » vous ne trouviez des juges aussi intègres qu'éclairés ;
 » dignes en tout de vous rendre la justice que vous avez
 » le droit d'attendre ; et je dois vous le répéter, plus les
 » connoissances que vous vous proposez de manifester,
 » s'élèvent au-dessus de la sphère commune, et s'éloi-
 » gnent des idées reçues, plus, avant de pouvoir y
 » donner aucune sorte d'assentiment de ma part, j'ai
 » besoin de m'appuyer d'un suffrage aussi imposant par
 » lui-même que par l'opinion qui l'entoure. Je m'em-
 » presserai de vous offrir tous les témoignages de con-
 » sideration et de reconnaissance publique, qui dépen-
 » dront de moi, aussitôt que je pourrai y être autorisé ».

Salut et fraternité, B E N E S E C K.

(Voyez, page 6, de la deuxième adresse à MM. les membres de l'Institut, une autre lettre du même ministre, par laquelle il m'invite et m'engage à soumettre mon ouvrage à l'examen de l'Institut national).

*Jugement particulier et décisif porté par MM. les
Membres de l'Institut national, sur ma décou-
verte de la Quadrature du Cercle.*

INSTITUT NATIONAL,

Classe des Sciences Physiques et Mathématiques.

Paris, le 3 vendémiaire an 13 de la République
française.

*Le Secrétaire perpétuel pour les Sciences Mathéma-
tiques, à M. Laurent POTIER.*

La Classe a reçu, Monsieur, l'Ouvrage que vous
avez bien voulu lui adresser sous ce titre : *Nouvelle
découverte qui embrasse toute la Géométrie*, etc.
ou *Identité géométrique du Cercle et du Quarré*. Elle
me charge de vous remercier de l'envoi de cet Ouvrage,
qu'elle a fait déposer dans la bibliothèque de l'Institut.

J'ai l'honneur de vous saluer,

DE LAMBRE.

Il faut considérer, 1°. Que cette lettre est en date
du 3 vendémiaire dernier, et que la présentation de
mon ouvrage a été faite le 30 fructidor dernier ;
c'est-à-dire, neuf jours auparavant ; mais que la vérité
est que je n'ai reçu cette même lettre qu'un mois et
demi après le 30 fructidor, laquelle m'a été remise
dans le lieu ordinaire des séances de l'Institut, le jour
même que je suis venu lui apporter ma découverte
d'une quatrième moyenne proportionnelle ajoutée au
quarré de l'hypothénuse ; 2°. que M. le secrétaire sans

doute s'est trompé en insérant dans cette lettre que j'avois fait l'envoi de mon ouvrage à l'Institut, tandis que c'est moi-même qui ai eu l'honneur de le présenter à la première classe de l'Institut, et de le donner à M. Carnot, alors président, en lui demandant des commissaires pour examiner ma découverte.

Ce considéré, je dis que la lettre ci-dessus doit être regardée comme un jugement particulier et décisif, porté par l'Institut sur ma découverte; et je le prouve. Il est d'abord évident qu'il ne s'agit point ici de simples remerciemens prescrits par l'usage, ni d'un simple dépôt ordonné par la coutume, car dans ce cas, tout cela aurait été fait sur-le-champ, et à l'instant même de la présentation de ma découverte, et n'eût pas été renvoyé à un temps plus éloigné, nécessaire, et même beaucoup plus que suffisant pour l'examen de cet ouvrage. Cette preuve devient d'autant plus forte que le dépôt et les remerciemens à l'égard de cette découverte ont été faits par ceux là mêmes qui sont institués juges absolus dans cette partie, qui, ayant entre les mains la vérité de cette grande découverte, n'ont pu s'empêcher de la communiquer. Il est donc évident que MM. les membres de l'Institut n'ont pu m'honorer de cette lettre qu'après avoir fait l'examen de la question principale, car il n'en est pas d'une découverte géométrique, comme de tout autre ouvrage; celui-ci peut avoir plusieurs sortes de mérite, mais ce qui fait tout le mérite d'un problème géométrique, c'est la vérité de sa solution.

Lorsque j'ai eu l'honneur de présenter à MM. les membres de l'Institut *cette nouvelle découverte*, elle ne fut pas d'abord accueillie favorablement, et sans doute, elle devoit être rejetée; parce qu'on la regardoit généralement comme une chose impossible, et parce que l'académie, elle-même, par son arrêté particulier, l'avait confondue avec la chimère du *mouvement perpétuel*, ainsi que la trisection de l'angle et la duplication du cube. Il aurait donc été bien ridicule et bien contradictoire de la part de MM. de l'Institut, de m'avoir fait, à l'instant de ma présentation, des remerciemens d'une découverte chimérique, et d'en avoir ordonné le dépôt dans leur bibliothèque. M. le rédacteur du *magasin encyclopédique*, membre de l'Institut, nous dit *qu'il est d'usage à l'Institut, de faire des lettres de remerciemens aux auteurs qui lui envoient leurs ouvrages*. Je lui réponds que cet usage ne peut être observé dans toutes les circonstances. La *politesse* exige-t-elle qu'une société de Savants remercie un auteur de lui avoir offert un ouvrage qu'ils regardent, tous, comme une vraie chimère et comme une absurdité? Ne seroit-il pas du plus grand ridicule de soutenir que cette même société se trouveroit obligée de conserver soigneusement dans sa bibliothèque une pareille production. De toute la foule de ceux qui se sont présentés dans tous les temps à l'académie, pour la prier de juger *sur la quadrature du Cercle*, il n'en est pas un seul à qui elle ait cru devoir accorder cette faveur. Si MM. de l'Institut me l'ont accordée, il a fallu nécessairement qu'un motif le plus puissant les ait déterminé à faire à mon égard une démarche si extraordinaire.

Ce motif, c'est la vérité qu'ils ont reconnue, et à laquelle ils n'ont pu résister. Donc, MM. de l'Institut ont déjà porté leur jugement sur ma découverte.

Le même journaliste, académicien distingué, nous apprend aussi que l'Institut est obligé de recevoir tous les ouvrages qu'on lui présente : or, je dis que cette obligation de les recevoir, suppose évidemment celle de les juger ; la première obligation deviendrait, sans celle-ci, vaine et illusoire. C'est ainsi que les juges d'un tribunal civil sont obligés de recevoir toutes les causes qu'on y porte et qui sont de son ressort, et conséquemment leur devoir est de les juger. Il en est de même à l'égard de MM. de l'Institut, qui occupent les sièges du premier tribunal des sciences ; c'est pourquoi l'académie n'a jamais refusé de rendre son jugement public sur aucun ouvrage, à la réquisition des auteurs. Elle s'est fait un devoir particulier de juger les *quadratureurs*, toutes les fois qu'ils l'ont requis. En 1775, le 21 janvier, elle décida, sur le rapport de MM. Jaurat et Cousin, que la prétendue découverte de M. De Vausenville, étoit évidemment fausse.

En 1774, l'académie a rejeté, comme également fausse, la démonstration de la quadrature du Cercle, donnée par Louis Dufé Lafratnage.

Il suit de ce raisonnement, appuyé sur les faits mêmes et sur le rapport de M. le journaliste académicien, que l'Institut ne peut s'empêcher de rendre aujourd'hui public son jugement à l'égard de l'ouvrage que j'ai eu l'honneur de lui présenter depuis l'espace de dix mois, et que cet arrêté particulier, dont ils se servent pour paroître autoriser leur retard, n'est

qu'un prétexte vain et frivole aux yeux de tout le monde. J'espère toujours que l'on me rendra bientôt la justice qui m'appartient, et que celui qui a été appelé par un ministre savant de la France, et qui honore sa patrie par les découvertes les plus étonnantes que le génie de l'homme a peut-être faites, ne restera point abandonné par un gouvernement protecteur des sciences. (1)

(1) Cet ouvrage a été annoncé dans tous les journaux de la capitale. Les rédacteurs qui sont les plus instruits et les plus capables d'en décider, ont gardé le silence; trois d'entre les autres, sans attaquer l'ouvrage, ont vomie contre moi des injures grossières, auxquelles je ne répondrai point. La seule punition qu'ils recevront de ma part, c'est de les dénommer ici et de les attacher avec cette même vérité qu'ils auroient voulu anéantir par leurs vaines clameurs: 1° *Le Journal des Spectacles*, N°. du 11 prairial an 13. L'auteur de la diatribe insulte jusqu'à l'indigence où je me trouve réduit. Il y a de la générosité de sa part à insulter celui que la révolution a dépouillé entièrement de tous ses biens. La pauvreté n'est pas à mes yeux un vice qui déshonore. Oui, je m'en fais gloire. Un peu de pain suffit aujourd'hui à ma nourriture, en attendant patiemment le jugement de MM. de l'Institut. 2° *Le Bulletin de l'Europe*, N°. 61, et un autre N°. On peut juger de la critique par l'annonce qu'il a fait de l'ouvrage, *Nouvelle Découverte, où l'identité Géométrique*, 1 vol. in-8. 3° Le troisième journaliste est celui des *Arts et des Sciences*, voyez le N°. 420, signé *Coupe*. Celui-ci est plus coupable que tous les autres, étant censé devoir connaître mieux la vérité qu'il a sous les yeux.

E R R A T A.

Page 24, ligne 23, le point c de la circonférence, etc.
lisez: le point $a c$ de la circonférence est le premier point de la diagonale $a c f$, le point $c d$ est le premier point de la diagonale $c d f$, le point $d e$ est le premier point de la diagonale $d e f$, etc.

Page 37, ligne 23, lisez: que le cercle $a b c d$, fig. 3, en s'applatisant aux points b et d , doit nécessairement s'allonger et former une ellipse, en sorte que les points a et c correspondent aux points A et C , et les points d et b aux points D et B .

Page 39, dernière ligne, lisez: de l'arc $a e d$ et de l'arc $b f c$.

Page 48, ligne 5, lisez: côté du carré inscrit $a d \times a d$;
et même page, ligne 8, lisez: à la surface du cercle dont le rayon est $\frac{r}{2}$ et la demi-circonférence est $m p t$.

Page 50, ligne 2. De la démonstration et autres lignes de la même démonstration en dénommant le cercle $a b$, lisez: le cercle $A B$.

Page 93, ligne 9, coupées également aux points $h a a A$, lisez: coupées également par la ligne h , parallèle à $g l$.

Page 111, ligne 16, égal à $e m$, lisez: égal à la ligne $e m$ que vous aurez tirée perpendiculairement du point e sur le diamètre de votre cercle.

Page 121, ligne 13, ou bien il faut convenir, lisez: il faut convenir, etc.

Page 122, ligne 4, cherchez d'abord le carré du cercle a , ajoutez: par la méthode géométrique qui vient d'être enseignée.

Page 138, ligne 9, figure 30, lisez: figure 29.

Page 139, ligne 19, $c p$, lisez: $c e$.

Même page, ligne 23, $c p e$, lisez: $e i p$.

Même page, ligne 27, aux deux extérieurs, lisez: aux deux intérieurs.

Même page, ligne 25, de l'un et de l'autre, lisez: de l'un ou de l'autre.

Page 144, lignes 7 et 8, sur l'arc fondamental $i q$, lisez: sur la moitié de l'arc fondamental $\frac{19}{2}$.

Page 145, ligne 1, $c e L$, lisez: $C e L$.

Page 150, ligne 2, étant à l'égard extérieur des, etc., lisez: étant extérieur à l'égard des, etc.

Page 157, ligne 13, Ca , lisez: Cr .

Page 172, ligne 20, la vérité de la solution, lisez: la solution.

J'avois pris la résolution de ne point répondre à la critique du journal des sciences, N° 420, du 20 prairial, an 13. On m'a fait observer que l'on avait profité du titre seul de ce *journal des Arts et des Sciences*, redigé par une société de gens de lettres, pour tâcher d'en imposer, non pas à ceux qui sont instruits des mathématiques, mais à un plus grand nombre d'autres personnes qui les ignorent, car, tout le monde n'est pas obligé de savoir la géométrie; c'est pour ceux-là seuls, que je réplique.

Réponse à la critique signée A. Coupé, et insérée dans le journal des Arts et Sciences, N° 420, 20 prairial de l'an 13.

M. Coupé me permettra d'abord de ne point m'arrêter à ces traits d'esprit et de gentillesse, dont il a parsemé le commencement et la fin de sa critique, je viens tout d'un coup à son début. « L'esprit-humain, » dit-il, est sujet à certaines maladies (et particulièrement remment les cervelles savantes), dont les symptômes *sont les recherches chimériques*. C'est ainsi que les publicistes ont cherché la paix perpétuelle, les chimistes ont couru après la transmutation des métaux, les mécaniciens après le mouvement perpétuel, etc; les géomètres ont aussi leur chimère, etc. ». Voici les paroles de M. Defontenelle, dans son dialogue des morts, tome 11 page 116. *Toutes les sciences ont leur chimère, après laquelle elles courent, sans la pouvoir attrapper. La chimie a sa pierre philosophale, le géométrie sa quadrature du cercle, l'astronomie ses longitudes, les mécaniques leur mouvement perpétuel, etc., la morale a aussi sa chimère, etc.*

Il n'est personne assurément qui n'aperçoive du premier coup-d'œil, l'identité de ces deux phrases. Comme le journaliste n'a aucune honte de chercher à faire illusion au public à l'égard d'une vérité la plus évidente qu'il a sous les yeux, il doit encore avoir moins de honte à restituer ici publiquement ce qui ne lui appartient point. Poursuivons : « Dans la résolution

tifiables ne sont point de vraies courbes ; mais n'ont que l'apparence. La ligne droite établie rigoureusement droite. etc. Sachez, M. Coupé, qu'on ne peut pas établir en géométrie une *ligne droite*, et une *ligne rigoureusement droite* ; parce que d'un même point, l'on ne peut tirer qu'une seule ligne droite. Il n'en est pas de même de la courbe, qui peut être plus ou moins courbe. Mais une ligne droite ne peut jamais être plus ou moins droite. M. Coupé ignore même ce que c'est qu'une démonstration géométrique. « Démontrer en géométrie, c'est, dit-il, ramener une vérité d'une énonciation compliquée à une autre vérité d'une énonciation plus simple, etc. » Non, non, M. Coupé. Démontrer, en géométrie, c'est prouver une vérité dont l'énonciation est la plus simple, par plusieurs raisonnemens liés les uns aux autres, dont les conséquences évidentes tendent toutes à nous convaincre de la vérité qu'on a simplement énoncée. Je pense que M. le rédacteur a bien de la peine à comprendre lui-même ce qu'il a voulu nous dire par ces mots : « Cette impossibilité de démonstration devient elle-même la démonstration la plus forte que l'on puisse apporter. » Hélas ! comment une pareille rapsodie se trouve-t-elle insérée dans un journal des sciences ? Ce sera un monument non équivoque qui attestera aux siècles futurs par quels moyens on a cherché à obscurcir et anéantir l'une des plus grandes vérités de la nature.

J'attache ici le nom de l'auteur de cette critique la plus injuste, au commencement de mon ouvrage, comme Prométhée étoit attaché au sommet du mont Caucase. Le crime de celui-ci étoit d'avoir voulu dérober un rayon du feu du ciel. Le crime de celui-là est au contraire d'avoir voulu déprimer et anéantir aux yeux du public une vérité éternelle, qui est un vrai rayon de la divinité. Des vautours déchiroient sans cesse les entrailles renaissantes de Prométhée. Les reproches continuels que la postérité fera à M. Coupé, seront ces vautours ; et le temps seul sera l'Hercule qui pourra faire oublier son crime et finir son supplice.

AUSPICE DEO OPTIMO MAXIMO.

PUISSANT architecte du monde , géomètre éternel , c'est sous tes auspices que j'ai entrepris cet ouvrage , qui n'est à tes yeux que l'effort d'un faible mortel. En toutes choses , tu nous manifestes ta volonté. Enfin , le temps est venu , où tu as voulu découvrir aux hommes deux grandes vérités que tous les savans ont cherchées depuis tant de siècles. Ce n'est pas au milieu du tumulte de nos villes , ni dans le sein de ces sociétés où les sciences réunies brillent avec le plus grand éclat ; mais c'est dans la solitude et dans l'obscurité que tu as choisi celui qui devoit pénétrer ces secrets de la nature. Heureux , si , par ses longs et pénibles travaux , il peut honorer sa patrie ! Il fera connoître à ses semblables , d'une manière évidente , par quel effet de ta puissance la masse énorme des eaux contenues dans le vaste bassin de l'océan se soulève et s'abaisse deux fois par jour régulièrement , et comment ce mouvement périodique des mers est le résultat du double mouvement de notre globe , qui , en roulant sans cesse sur lui-même , parcourt en même temps la ligne que tu lui as tracée dans les cieux. S'il est quelqu'un parmi nous assez aveuglé pour ne point voir les marques de ta puissance qui

brillent de toutes parts dans l'univers , qu'il vienne considérer avec moi cette multitude infinie de rapports et de proportions , ou plutôt de liens qui enchainent le cercle avec le quarré , et avec toutes les autres figures. Ce sont autant de lignes qui tiennent toutes à *un seul point mathématique* , lequel nous étoit resté caché jusqu'à ce jour. Il sera frappé de la décision simple et claire d'un problème qui embrasse toute la géométrie , et qui a été regardé par tous les savans comme le mystère le plus impénétrable des mathématiques. Est-ce le hasard qui a formé toutes ces combinaisons dont notre esprit a découvert le fil , sans pouvoir atteindre à la fin ? On nous dira que ce sont des vérités éternelles. Oui , sans doute ; mais ces vérités émanent de ton intelligence infinie. Parce que tu as donné à ton ouvrage le sceau de l'immortalité , faut-il méconnoître son auteur ? parce que les loix que tu as établies dans l'univers restent invariables , faut-il refuser de reconnoître le législateur ? Hélas ! plus je lis dans le grand livre de la nature , plus j'y découvre imprimées sur toutes les pages les traces de ta grandeur , de ta puissance et de ta sagesse.

A MESSIEURS
LES PRÉSIDENTS
ET MEMBRES DE L'INSTITUT
NATIONAL.

MESSIEURS,

LES sciences , comme les empires , sont sujettes à des révolutions. La sphère des connoissances humaines et le cercle des états policés roulent également dans l'immensité des siècles , en suivant leurs destinées. Dans tous les temps , dans tous les pays , la multitude des hommes se laisse entraîner par une idée générale qui domine leur esprit et le subjuguie entièrement. Chacun marche aveuglément dans la route frayée par la foule du peuple , où se trouvent confondus le savant et l'ignorant , le sage et l'insensé ; c'est ainsi que dans le monde , avec le temps , l'erreur devient vérité. Ainsi s'accroît et se fortifie de plus en plus le faux préjugé contre lequel la raison devient trop foible pour le combattre et le détruire , mais enfin , il arrive un moment imprévu où cette

base, solide en apparence sur laquelle l'opinion publique s'étoit élevée, s'ébranle tout-à-coup, et l'édifice entier bâti par l'erreur et le faux préjugé s'écroule, tombe de fond en comble au grand étonnement du peuple et des savans. Du milieu de ses décombres, sort la vérité, retenue depuis long-temps captive. Ainsi, MESSIEURS, l'opinion publique et le faux préjugé, s'élevoient de toutes parts dans la France, et peut-être dans toute l'Europe contre la première des vérités de la nature, je veux dire, contre *la quadrature du cercle*, sur laquelle se trouvent fondées plusieurs autres grandes vérités, qui, jusqu'à ce jour, sont demeurées impénétrables à l'esprit de l'homme. Ce n'étoit point l'erreur de quelques particuliers que j'avois à combattre; mais l'erreur de toute la nation, et peut-être du monde entier. Hélas! que de travaux, que de peines, que de veilles, que d'humiliations, que d'affronts mêmes, n'ai-je pas éprouvé depuis l'espace de plus de dix années que j'ai commencé cette grande entreprise! Je ne pouvois en parler à personne; et si par hasard il m'échappoit un mot sur ce sujet, à l'instant on me taxoit de folie; mais les Savans ont eux-mêmes contribué à augmenter la force du préjugé. Permettez-moi de vous le dire ici: l'ancienne Académie avoit mis un grand obstacle aux efforts du génie, en prenant un ar-

rité qui confond l'existence de la quadrature du cercle , de la trisection de l'angle et de la duplication du cube avec celle du *mouvement perpétuel* , dont la découverte est démontrée impossible à l'homme. Elle avoit posé , sans le savoir , par cet *arrêté* , une barrière qui bornoit entièrement l'étendue des connoissances humaines. Aujourd'hui , cette barrière est renversée , et les bornes de l'esprit humain sont reculées.

L'ouvrage que j'ai eu l'honneur de vous présenter , dès le 30 fructidor an 12 , en vous suppliant d'y donner votre sanction publique ; cet ouvrage que je vous ai encore adressé , depuis que j'y ai ajouté le fameux problème de la *trisection* , en vous réitérant ma prière , est l'une des plus grandes et des plus vastes entreprises formées par l'esprit de l'homme et mises en exécution. Retiré au fonds d'une campagne , loin du tumulte des villes , suivant le penchant naturel qui m'a entraîné dès ma plus tendre jeunesse vers les sciences , je me suis livré constamment à l'étude de la nature ; j'ai cherché à pénétrer ses secrets , autant que la foiblesse de mes lumières me l'ont permises. D'après mes observations , j'ai vu clairement que le mouvement étoit l'ame de la nature , et que tous les corps de l'univers tendoient vers un centre. Dès-lors , j'ai conclu que leurs

mouvement général ne pouvoit se perpétuer que par la révolution de la ligne circulaire ou de la courbe. Le cercle est donc la figure essentielle qui domine dans la nature ; et toutes les autres figures n'en sont que des modifications différentes ; *voilà ce que je me disais à moi-même* : tous les corps de l'univers sont enchaînés les uns aux autres ; cet enchaînement est formé par des liens physiques. Il y a une analogie qui est frappante , entre la terre et les cieux , tout se tient , tout se communique , et part d'un même principe. Ainsi , toutes les figures , toutes les lignes que peuvent tracer les corps mus dans la nature d'une manière uniforme , doivent tenir au *cercle* par un lien réel et invisible.

Telle est, MESSIEURS , la première cause de la découverte que j'ai faite , qui influera sur les siècles futurs , et que j'étois jaloux de vous offrir , et d'offrir à ma patrie , ainsi qu'au Chef Suprême qui la gouverne.

Cet ouvrage , peut-être , ne porte point avec lui toute l'empreinte de l'homme le plus approfondi dans les mathématiques ; mais la vérité s'y présente avec cette simplicité , avec ces traits de lumière qui la font reconnoître aisément aux yeux de tout le monde. Les différentes parties de cette découverte sont étroitement liées les unes aux autres ; elles dépendent toutes de la solution géométrique du *pro-*

blème de la quadrature, de manière que tous les autres *théorèmes* et *problèmes* peuvent se démontrer rigoureusement et par nombres et par lignes. Le rapport admirable de la circonférence du cercle à son diamètre se forme de la mesure arithmétique, qui, en donnant le quarré du cercle, donne en même temps sa circonférence. Ces deux figures qui, jusqu'à présent, nous ont paru si contraires l'une à l'autre, se trouvent composées des mêmes parties élémentaires; elles renferment le même espace, et n'ont qu'une même *identité*. Cette grande vérité entraîne avec elle plusieurs autres vérités les plus importantes que les hommes ont cherché vainement à pénétrer depuis des milliers d'années. Déjà, MESSIEURS, vous ne pouvez plus douter de la *trisection de l'arc et de son angle*; problème merveilleux qui, en réunissant ses rayons de lumière à ceux du problème *de la quadrature*, offre à vos yeux étonnés tout l'éclat du flambeau de l'évidence. Bientôt la solution du fameux problème des *longitudes* déterminera la grandeur exacte de l'arc intercepté entre le premier méridien et le méridien du lieu, dont vous désirerez de connoître la *longitude*. Enfin, les avantages précieux de cette découverte vont se développer de plus en plus. MESSIEURS, pourquoi donc différez-vous à me rendre la justice qui m'appartient depuis quatre mois entiers? Eh!

que diront les siècles futurs, lorsqu'ils apprendront que vous tardez aussi long-tems d'accueillir publiquement plusieurs découvertes que tous les siècles passés ont cherché avec tant d'ardeur et tant d'empressement ? Vous différez toujours, MESSIEURS ; mais ce retard se trouve incompatible avec la protection particulière que l'Empereur accorde aux sciences et qu'il vous accorde à vous-mêmes. Ce retard est incompatible avec les loix de la justice qui réclament en ma faveur le dépôt qui vous a été confié pour la découverte de la *quadrature du cercle* et de la *trisection de l'arc*. Autant de jours que vous différez, ce sont autant de jours que vous enlevez à la gloire de la Nation, à la gloire de l'empereur, et j'ose dire, à votre propre gloire. Ce sont autant de jours de plus que vous m'abandonnez à ma misère, à mon indigence(a). Hélas ! je parois à vos yeux

(a) J'étois Curé depuis 25 ans dans une campagne, où je me livrois entièrement à l'étude des sciences, parmi lesquelles j'ai toujours distingué la médecine. Chaque jour, après avoir médité sur les grands corps de la nature qui se communiquent les uns aux autres, j'aimois à reposer mes yeux sur la structure du corps humain, machine étonnante et admirable, composée d'une multitude infinie de parties différentes, qui m'offroient le spectacle d'un autre petit univers. Je n'interrompois mes travaux que pour panser les plaies d'un grand nombre de pauvres affligés qui venoient me trouver dans ma solitude ; et ma plus grande joie étoit de pouvoir soulager les malheu-

vif

sans soutien , sans domicile , retiré depuis seize mois dans l'azile dispendieux du voyageur. Mais vous vous trompez ; ce trône que vous voyez élevé au milieu du peuple Français , est le soutien du foible. Ce trône est l'azile de celui qui implore la justice de l'Empereur. Il sait bien que les victoires et les conquêtes d'un Prince sont graver son nom sur le marbre , et que c'est la justice et la bonté qui le font graver dans tous les cœurs de ses sujets. La parole solennelle qu'il a donnée au peuple Français , il la tiendra. Il s'agit ici de la gloire de la Nation. Il s'agit de sa propre gloire. C'est pour son temps seul que le Ciel avoit réservé cette grande découverte , qui a été cherchée par tous les Savans de tous les pays et de tous les temps ? Découverte , dont on ne prévoyoit pas tous les avantages , et qui va tracer un sillon

reux. A l'instant de la révolution , dépouillé de tous mes biens , j'étois décidé à retourner dans le pays qui m'a vu naître , espérant de trouver quelques secours auprès de mes frères , qui ont de la fortune et qui jouissent de mon patrimoine. Mes meubles étoient déjà vendus ; mais le nombre des malades qui venoient toujours me trouver s'augmentoît de jour en jour. On me sollicita de rester , et depuis ce temps là , je n'ai point cessé d'exercer l'art de la médecine , en me conformant à la loi , ne croyant pas cet état incompatible avec celui d'un Ecclésiastique. J'avois le bonheur de réussir. Pour venir dans cette capitale , j'ai été forcé de tout abandonner. Je ne croyois pas éprouver tant d'obstacles.

vij

profond et ineffaçable dans le vaste champ des connoissances humaines.

Veuillez donc, MESSIEURS, vous intéresser au sort de celui qui n'a ni terres, ni aucun revenu. Ne différez plus de donner, par votre jugement, la sanction publique à cet ouvrage, afin que je puisse recevoir le salaire de mes travaux, qui est consacré par un acte légal et authentique (a), à l'auteur de cette découverte; et lorsque je l'aurai reçu, je ferai construire, à mes frais, l'instrument hydraulique propre à accélérer la marche des vaisseaux et à en augmenter considérablement la vitesse.

J'ai l'honneur d'être avec respect, MESSIEURS, votre très-humble serviteur.

LAURENT POTIER DESLORIERES,

Auteur de la découverte de la quadrature du cercle, etc, demeurant à l'hôtel d'Anjou, rue Serpente.

Paris, ce 25 nivôse an XIII.

(a) Testament de M. de Méley, par lequel il a légué cinquante mille écus à celui qui trouverait la quadrature du cercle, au jugement de l'Académie.

Supplément à l'Adresse.

Il n'y a personne dont le jugement puisse remplacer celui de L'INSTITUT NATIONAL, à l'égard de cet ouvrage, 1.^o parce que cette Société est instituée par le gouvernement comme premier juge des ouvrages qui paraissent en public; 2.^o parce que le testament de M. de Méley, a établi l'Académie seul juge de la *Découverte de la Quadrature*; et l'Académie, ayant reçu le dépôt des 150,000 fr. légués, pour être données à l'auteur de cette Découverte, s'est engagée elle-même à prononcer sur cet ouvrage. Telles sont les raisons qui m'ont forcé de faire cette Adresse. Quels doivent être donc les prétextes qui autorisent M. les membres de l'Institut à différer toujours leur jugement à mon égard? N'est-il pas de leur devoir de prononcer sur cet ouvrage si important pour les sciences, comme il est du devoir d'un juge de prononcer sur les différentes causes qui sont de son ressort? Diront-ils que cette découverte présente des difficultés? Rien n'est plus simple, rien n'est plus clair, rien n'est plus lié dans tout son ensemble que la *Quadrature du Cercle* avec le rapport de la circonférence à son diamètre. La solution de ce problème est mise à la portée de celui-là même qui ne possède que les éléments de la

géométrie. Diront-ils qu'il ne s'agit que d'un simple problème ? Tandis que cette Découverte tient à toute la nature. Les savans ne prévoyaient point les avantages immenses qu'on retirerait de la *Quadrature du Cercle* ; par ce qu'ils la regardaient, tous, comme un problème, qui consistoit dans le seul rapport de la circonférence au diamètre. Que leur erreur a été grande jusqu'à ce jour ! Ils ne s'imaginaient point que c'était-là la principale clef de la géométrie, qui devait nous ouvrir les lieux les plus cachés, les lieux les plus secrets, les plus impénétrables de cette science divine. Les géomètres ressemblent au P. Marsenne qui, en cherchant la Cycloïde, ne pensait qu'à trouver la solution d'un problème très-fameux parmi les Savans, et qu'à découvrir cette courbe qui se forme par la révolution d'un point quelconque du cercle dont la circonférence se déploie sur une ligne droite. Ce savant religieux ne prévoyoit pas qu'un jour viendrait où le célèbre Huyghens se serviroit de cette même courbe pour rendre parfaitement égales toutes les vibrations du pendule. Ainsi les premiers savans n'ont cherché d'abord, dans l'aiman qu'à découvrir de plus en plus les effets merveilleux de la force attractive. Ils ne soupçonnoient pas qu'un jour une simple aiguille aimantée nous suffiroit pour tracer sur toute la surface du globe une ligne qui s'étendrait d'un pôle

à l'autre, et qui dirigeroit à travers les mers la route de nos vaisseaux.

Ainsi cette grande découverte de la *Quadrature du Cercle* va reculer les bornes de l'esprit humain, et le diriger au milieu des écueils et des plus fortes difficultés de la géométrie. En un mot, elle est la clef de toutes les autres découvertes; et s'il nous reste encore plusieurs choses à expliquer dans la physique; c'est parce qu'on a trop négligé d'employer à leurs recherches, le secours de la géométrie; c'est parce qu'on n'était pas encore parvenu assez loin dans le temple, et qu'on n'avait pas encore pu pénétrer jusqu'au sanctuaire de cette science sublime qui nous vient des cieux. O Napoléon! ô empereur des Français! ô vous qui êtes le protecteur des sciences, vous qui êtes le soutien de la justice, prêtez une oreille favorable à ma faible voix. En plaidant ici ma cause, je plaide celle de la justice qui repose sur l'exécution des actes authentiques et consacrés dans toute société civile, je plaide celle de ma patrie, celle de toutes les nations qui s'intéressent aux progrès des connaissances humaines.

Extrait du Livre intitulé : Essai Phisico-Géométrique de l'an 1778, par M. le Rohberg-Herr de Vausenville, académicien correspondant de Paris. A Paris, chez d'Houry et Mérigot, libraires.

A Paris, le 16 mars 1758.

« Je dois partir dans 15 jours, Monsieur,

» pour aller prendre possession, comme je
 » vous l'ai mandé, de la terre dont le roi a
 » eu la bonté de me donner la propriété. Je
 » voudrois, avant mon départ, commencer
 » l'affaire qui regarde la succession de feu *M. de*
 » *Malley*, qui a légué par testament, cinquante,
 » mille écus à celui qui trouveroit la *Quadra-*
 » *tura du Cercle*. Il faut un habile géomètre ;
 » je ne saurois mieux m'adresser qu'à vous...
 » Je ne voudrois pas prendre cette voie sans
 » certitude d'avoir raison. Je recevrai de vos
 » nouvelles avec plaisir, étant toujours avec
 » des sentimens d'amitié et de confiance, Mon-
 » sieur, votre très-humble et très-obéissant
 » serviteur,

» *Le Chevalier de CAUSAN MAUBÉON*, colonel
 » du régiment de Conti, infanterie, et gou-
 » verneur de son Altesse, etc. »

*Cette lettre est adressée à M. le Bohberg-
 Herr de Kausenille, membre correspondant de
 l'Académie des Sciences de Paris.*

Il est inutile de produire ici d'autres preuves
 de ce testament fait en faveur de la *Découverte*
de la Quadrature du Cercle. Son existence est
 reconnue publiquement.

(1)

A MESSIEURS,
LES PRÉSIDENTS ET MEMBRES DE
L'INSTITUT NATIONAL.

MESSIEURS,

JE prends encore une fois la liberté de vous envoyer un exemplaire de mon ouvrage qui s'accroît toujours de plus en plus. Vous y trouverez non seulement la *quadrature du cercle* et la *trisection de l'angle et de l'arc*, mais encore la *duplication du cube*. J'ai suivi le même ordre dans ces deux dernières découvertes qui tiennent entièrement à celle de la *quadrature*, et qui comprennent, chacune, trois problèmes dont l'un est fondamental. Quelle doit être, donc votre surprise ! en voyant aujourd'hui une double solution géométrique de ces problèmes que vous avez déclarés impossible ; il est vrai que le géomètre ne pouvait jamais espérer de résoudre par le moyen des équations, ces problèmes du 3^e degré. Mais il ne devait pas en conclure qu'il était impossible d'en avoir la solution géométrique. La marche de la nature n'est pas celle que l'esprit humain est forcé de suivre pour acquérir des connaissances. L'homme se traîne pas à pas vers la vérité ; et pour marcher sûrement au milieu

des ténèbres qui l'environnent de tous côtés, sa faiblesse l'oblige d'aller toujours d'une conséquence à l'autre, en suivant le fil qui le conduit de l'antécédent au conséquent. Mais la nature, puissante dans ses opérations, pose un premier principe d'où tous les autres dérivent; et c'est toujours sur ce fondement qu'elle bâtit, en trouvant le moyen de varier à l'infini ses constructions qui excitent notre admiration, et élèvent notre ame vers son auteur.

La *quadrature du cercle* que vous regardiez comme un problème plus curieux qu'utile, est donc l'un des premiers principes de la nature. Elle embrasse l'univers entier; où s'observent exactement toutes les règles de la géométrie la plus sublime. Vous serez étonnés de voir dans le cercle l'exécution parfaite de la seconde loi du célèbre *Képler* que tous les astres suivent dans leur cours périodique autour de leur centre; en sorte que les quarrés des temps qu'ils emploient à tourner autour du point central qui leur est commun, se trouvent toujours en raison des cubes de leur distance à ce même point central. C'est le cercle seul qui a la vertu de perpétuer le mouvement dans la nature et de le conserver sans cesse dans toutes ses parties. C'est par le cercle que je vous prouverai que le mouvement est infini dans ses différens degrés d'accroissement. Car, si

vous supposez un globe qui roule sur lui-même avec tel degré de vitesse qu'il vous plaira de lui donner ; je puis en supposer un autre dont le diamètre sera plus grand, et dont l'axe étant attaché à celui du premier, tournera par conséquent avec lui. Il est évident que ce globe ajouté, et supposé plus gros, aura nécessairement plus de vitesse, puisqu'il parcourra dans le même temps un plus grand espace. J'ai donc eu raison de démontrer au commencement de cet ouvrage cette vérité fondamentale qui nous fait voir l'*incommensurabilité du cercle* dans toutes ses divisions.

Ainsi les diverses parties de cet ouvrage que j'ai eu l'honneur de vous présenter sont liées non-seulement entr'elles, mais encore avec toutes les lois de la nature. Bientôt l'homme qui franchit l'espace immense des mers, connaîtra la grandeur exacte de l'arc intercepté entre le méridien du lieu qu'il aura quitté, et celui du lieu où il sera arrivé. Enfin, cette découverte est une source intarissable où les savans ne cesseront de puiser. O vous, Messier, Laplace, Lagrange ! etc. C'est à vous qu'il appartient de pénétrer jusqu'au fonds de cette source qui recelait depuis si longtems les plus grands secrets de la nature. Si le ciel eût permis que l'un de vous eût été l'auteur de cette grande découverte ; il y aurait eu moins d'étonnement et moins de surprise dans

Daignez donc , je vous prie , me rendre la justice qui m'appartient (2). Je n'attends que ce moment pour retourner dans ma solitude , et partager avec les malheureux la somme que m'a destiné la providence ; après vous en avoir laissé une partie que je consacrerai à la mémoire du testateur comme l'un des bienfaiteurs du genre humain ; et mon premier soin sera de faire construire à mes frais l'instrument propre à accélérer la marche des vaisseaux.

A Paris , le 21 ventose , an 13,

J'ai l'honneur d'être avec respect, messieurs,
votre très-humble et obéissant serviteur ,

L. POTIER DESLAURIÈRES.

(1) Oui, mes travaux sont immenses et incroyables, et quand j'ai dit que ces découvertes étaient le fruit de dix années de travail, j'ai voulu dire dix années d'un travail continuél. Car je peux prouver qu'il y a plus de vingt ans que cet ouvrage a été commencé; puisqu'en l'an 4 j'avais déjà fait plusieurs de ces découvertes; ainsi qu'il est constaté par la lettre que feu M. Beneseth, *ministre de l'intérieur*, me fit l'honneur de m'écire en date du 19 ventose de l'an 4.

« Vous annoncez , citbyen , des découvertes aussi
» nombreuses qu'importantes, dont une seule pour-
» rait suffire pour immortaliser son auteur, et appeler
» sur lui la reconnaissance publique. Tout ce que les
» sciences physiques et mathématiques ont de plus re-
» levé, ou même, ont eu jusqu'à présent de plus inac-
» cessible aurait été franchi par vous. A la chaleur des
» expressions, à la lumière des aperçus qui se font
» remarquer dans vos idées, on serait prêt à se laisser
» entraîner... Je vous invite par le puissant intérêt que
» m'inspirent vos travaux, et je dois vous engager à sou-
» mettre votre ouvrage à l'examen de l'Institut national,
» spécialement chargé de veiller au dépôt et au perfection-

« nément des sciences et des arts, et dont le suffrage
 » ne pourra qu'attacher un nouvel éclat à vos découverts,
 » et vous donner les droits les plus étendus comme
 » les plus légitimes aux récompenses nationales. Salut et
 » fraternité.

BENESSÉCH.

Ce savant Ministre, distingué par les plus grands talens, n'a pu être le témoin de ces découvertes. Des obstacles insurmontables s'y opposèrent, et la providence qui conduit tout, les avait réservées pour un autre temps.

(2) Pourquoi donc, messieurs, différer plus longtemps de rendre public le jugement que vous avez porté en particulier ? Lorsque j'ai eu l'honneur de vous offrir le 30 fructidor dernier, cet ouvrage, il ne fut point accueilli dans le moment, sous prétexte d'un ancien arrêté de l'Académie. Mais un mois et demi après, ces découvertes s'étant accrues de plus en plus, j'ai reçu une lettre de l'Institut, par laquelle on me remerciait de l'ouvrage que j'avais donné, et dans laquelle on me mandait que l'Institut en avait ordonné le dépôt à la bibliothèque publique. N'est-il pas évident aux yeux de tout le monde que vous n'avez pu me faire ces remerciemens, qu'après avoir examiné la principale question ? Il n'en est pas d'une vérité géométrique comme de tout autre ouvrage.

TABLE DES MATIERES

Qui suivent la découverte de la quadrature du cercle, et qui sont liées avec elle.

ADRESSE à M. M. les président et membres de l'Institut national, et supplém^{ent} à ladite Adresse, en date du 25 nivôse, l'an 13. Voyez la page première avant la préface.

SECONDE ADRESSE à M. M. les président et membres de l'Institut national, en date du 21 ventose, an 13, page

PROBLEME PREMIER. Quadrature de la por-

<i>tion du cercle renfermée dans un arc de 90 degrés,</i>	
THEOREME PREMIER. <i>Quatrieme moyenne proportionnelle ajoutée au quarré de l'hypothénuse,</i>	123
COROLLAIRE,	124
<i>De la trisection de l'angle,</i>	129
PROBLEME DEUXIEME. <i>Couper en trois parties égales un angle et l'arc qui en est la mesure,</i>	131
<i>Observation importante,</i>	133
<i>Extrait du journal d'indications, etc.</i>	135
PROBLEME TROISIEME <i>et général pour la Trisection de tous les angles et de tous les arcs,</i>	137
<i>Seconde partie de la solution,</i>	140
COROLLAIRE,	145
PROBLEME QUATRIEME <i>et remarquable. Donner une ligne à volonté, et trouver par le moyen de cette ligne l'arc fondamental de la trisection pour tous les arcs et pour tous les angles,</i>	148
<i>De la duplication du cube,</i>	152
PROBLEME CINQUIEME <i>et fondamental. Trouver deux moyennes proportionnelles entre les deux lignes,</i>	154
COROLLAIRE,	156
PROBLEME SIXIEME. <i>Trouver un cube double d'un autre cube donné,</i>	157
COROLLAIRE <i>dans lequel on découvre la cause de l'erreur géométrique commise par tous les savans. L'égard des problèmes du troisieme et quatrieme degré.</i>	159
PROBLEME SEPTIEME <i>et remarquable. Trouver facilement et sur-le-champ autant de cubes que l'on veut, qui soient doubles d'autres cubes donnés,</i>	163
COROLLAIRE.	166
<i>Du Problème des longitudes.</i>	168

PRÉFACE.

LE titre seul de cet ouvrage est sans doute pour le public un grand sujet d'étonnement et de surprise. On croyoit généralement que l'évidence des grandes vérités que j'annonce, ne pouvoit se démontrer que par la combinaison d'une multitude de lignes géométriques qui entraînoit nécessairement avec elle les plus grandes difficultés, et qui exigeoit, pour être bien comprise, les plus grands efforts de l'esprit. Mais non, la démonstration en est simple et claire : elle sera saisie facilement par le lecteur le moins approfondi dans la science des mathématiques. Tout homme un peu instruit pourra être mon juge ; car je n'ai fait que découvrir l'ouvrage simple de l'auteur de la nature ; et la vérité, dès qu'elle est une fois connue, porte avec elle une lumière vive qui frappe tous les yeux, et ne laisse à l'esprit aucun

doute, aucune obscurité ; en sorte que les choses qui sont les plus difficiles et qui nous paroissent être impossibles, nous semblent devenir pour ainsi dire faciles, parce que nous les connoissons. *Omnia hæc, dùm incipias, gravia sunt, dùm que ignores : ubi cognoveris, facilia. Terentius in heautos.* Ce qui surprend encore davantage, c'est la découverte que j'annonce d'un problème dont la solution est regardée depuis longtemps comme une chose tout-à-fait impossible. Il est bien vrai que de toutes les recherches qui ont occupé l'esprit humain, aucune n'a plus excité l'attention et le travail des grands génies, que la *quadrature du cercle*. Tous les savans malgré la supériorité de leurs lumières, n'ont pu découvrir quel étoit le lien admirable qui unit le cercle avec le quarré. C'est pourquoi on a regardé cette découverte comme une chose absolument impossible ; mais personne n'a pu donner encore la démonstration exacte de son impossibilité : elle restoit donc dans l'ordre des choses possibles. Je conviens que

l'immortel *Descartes* et le grand *Newton* n'ont pu, comme les autres géomètres, parvenir à la solution de ce fameux problème; mais de ce que tous ces grands hommes n'ont pu en venir à bout, doit-on conclure affirmativement que dans la postérité de tous les hommes qui viendront après eux, personne ne pourra réussir dans la même entreprise? Cette conclusion n'est pas conforme aux règles de la bonne logique; elle l'est encore moins aux règles de la justice; car aujourd'hui la vérité va se manifester. On ne peut blâmer l'académie d'avoir statué, par un *arrêté* particulier de tous ses membres, qu'elle ne s'occuperoit plus d'aucun mémoire écrit sur ce sujet; autrement elle eût été sans cesse accablée d'une multitude de gens qui auroient cru avoir tranché le nœud de la difficulté. Mais si cet *arrêté* devenoit entièrement exclusif pour tout le monde, même à l'égard d'un auteur qui est convaincu de l'évidence de ses preuves, jusqu'au point de donner au public son travail, et de le prendre pour juge dans

une chose qui contribue à la gloire et à l'utilité générale , alors je dirois que ce seroit mettre un obstacle continuel aux progrès des sciences ; et bien loin de chercher à éendre les connoissances humaines , ce seroit au contraire entretenir les hommes dans l'erreur et forcer leur esprit à se tenir courbé sous le joug des faux préjugés. Loin de moi de pareilles idées. Sans doute la société illustre des savans a des intentions plus pures ; elle sera au contraire la première à rendre hommage à la vérité. Quoique je sois assuré géométriquement de la découverte importante que je donne au public , il sera flatteur pour moi d'avoir les suffrages de cette académie à laquelle le chef suprême de la France a rendu son ancienne splendeur , qui fait le principal ornement de la nation , et qui est chargée de veiller au dépôt et au perfectionnement des sciences. Ce n'est point une de ces découvertes faites au hasard , dont tout le mérite est de satisfaire la curiosité et d'aiguiser la pointe du génie : fondée sur les principes invariables de

v

la géométrie, elle est la plus intéressante pour les sciences. Enfin l'homme va connoître quel est ce lien imperceptible qui réunit le cercle au quarré et le quarré au cercle, et par quel mécanisme ces deux figures, en comprenant la même surface, se trouvent être composées des mêmes parties élémentaires, en sorte qu'elles n'ont qu'une même identité. On verra comment le cercle domine sur toute la nature, et comme il peut se changer en toutes sortes de figures. Cette découverte embrasse toute la géométrie; elle en sera la principale clef qui va nous ouvrir la solution des plus grands problèmes; elle rendra nos connoissances plus réelles et moins relatives, et deviendra une source féconde de lumières, où le savant ne cessera de puiser.

Il est bien vrai que cette nouvelle découverte a fait l'objet des recherches inutiles des savans de tous les temps et de tous les pays. Archimède, l'un des plus profonds géomètres qui aient existé, est pour nous une preuve convainquante que les hommes

n'avoient pas encore pu , de son temps , parvenir à cette connoissance , malgré tous leurs efforts. Il vivoit il y a plus de deux mille ans. Nous n'avons aucun indice sur le globe , aucun monument chez les peuples policés qui nous atteste que cette découverte aie été déjà faite dans quelque pays. Cependant si elle existe aujourd'hui , on peut croire qu'elle a existé dans la longue suite des siècles passés ; et comme tout a ses bornes sur la terre , peut-être le pays où les sciences étoient parvenues au plus haut degré de perfection , est-il aujourd'hui une triste solitude qu'une révolution de l'ordre politique , ou qu'un bouleversement de l'ordre physique a dépeuplé entièrement ? Peut-être cette contrée , beaucoup plus ancienne que la Grèce et qu'Athènes , est-elle à présent ensevelie sous les eaux de l'Océan qui , en s'ouvrant un passage dans les terres , a submergé tout-à-coup des peuples entiers , des villes superbes et leurs habitans corrompus ? Au reste , le fait va prouver que ce qui a résisté depuis tant de siècles aux efforts des plus

grands géomètres, cède enfin aujourd'hui (non pas sans beaucoup de peines, et sans les plus grands travaux depuis plusieurs années) aux efforts d'un homme retiré dans l'obscurité d'une campagne, qui ne s'est instruit que par lui-même de la géométrie, et qui, cultivant les sciences dans sa solitude, ne quittoit la plume et le compas que pour panser les plaies d'un grand nombre de pauvres affligés. J'avoue qu'en venant dans cette capitale pour offrir au chef illustre de l'empire cet ouvrage, mon dessein étoit de le perfectionner de plus en plus, et à cet effet, de recourir à quelques savans. Mais pouvois-je espérer d'être accueilli favorablement, lorsque le préjugé et l'opinion publique me repousoient de tous côtés et me rejetoient entièrement? Je n'en ai pas été surpris. Tel est le sort ordinaire qu'éprouvent tous ceux qui annoncent à leurs contemporains des choses grandes, nouvelles, tout-à-fait opposées aux opinions reçues et aux préjugés publics. Lorsque Christophe Colomb disoit et répétoit tous les jours à ses concitoyens qu'il y

avoit au-delà de l'espace immense des mers ; une autre terre et d'autres peuples , personne ne vouloit le croire , on le regardoit comme un fou. Cependant c'est à ce grand homme que l'Europe doit la découverte de l'Amérique. Lorsque Galilée découvrit à son siècle que le soleil restoit toujours au même point qu'il occupe dans le ciel , et que c'étoit la terre qui tournoit autour du soleil , on le prit pour un visionnaire qui voyoit autrement que tous les autres. Cependant le double mouvement de la terre est une vérité aussi incontestable que le mouvement de la lune autour de notre globe. Un seul homme , grand par la place qu'il occupe , plus grand encore par son esprit et par son affabilité envers tout le monde , qui est la marque la plus sûre de la véritable grandeur , m'a inspiré du courage ; j'ai franchi tous les obstacles ; j'ai cru qu'il me suffisoit de présenter le flambeau de l'évidence aux hommes pour leur faire ouvrir les yeux. Je n'ai plus hésité de communiquer à mes semblables une des plus grandes vérités de la nature , qui est faite

pour toutes les nations instruites et pour tous les siècles. La vérité une fois découverte , ne peut rester long-temps cachée ; c'est un feu intérieur qui une fois allumé, fait sans cesse de tous côtés mille efforts pour briser la prison obscure qui le retient captif, et pour se répandre au dehors : telle on voit la vérité triomphante des préjugés qui l'enchaînoient depuis un si long temps , se communiquer tout-à-coup aux hommes et pénétrer jusques dans les climats les plus éloignés.

Le préjugé contre la *quadrature du cercle* est si grand ; que dans la société on ne fait aucune difficulté de confondre la découverte de ce problème avec celle du *mouvement perpétuel*. Cependant il y a bien de la différence entre les deux : l'un n'a jamais été démontré impossible ; tandis que l'autre est évidemment une chimère. Le mouvement perpétuel , découvert par les hommes, est une absurdité , parce que la main de l'homme ne peut mettre en mouvement que des corps altérables et maté-

riels. Or la matière ne peut se mouvoir par le moyen d'aucune machine quelconque, sans occasionner à quelqu'une de ses parties un certain froissement, ce qui doit nécessairement ralentir et détruire peu à peu le mouvement. Eh ! quand l'on supposeroit qu'un homme industrieux auroit trouvé le moyen de faire circuler sans cesse dans les airs une pierre, un caillou, je le veux ; mais au bout d'un certain temps, cette pierre même se trouveroit altérée par les impressions et par la résistance continuelle qu'elle éprouveroit de la part de l'air. Cela seul suffiroit pour diminuer et pour anéantir avec le temps le mouvement supposé de ce corps. Il n'appartient qu'à Dieu de conserver son ouvrage toujours inaltérable et tel qu'il est sorti de ses mains.

Mais, dit-on encore, *la découverte de la quadrature du cercle ne rendra pas un grand service aux sciences.* Voilà le langage ordinaire que tiennent presque tous les savans, et lequel est répété dans la plupart des livres de géométrie. M. de la Chapelle

est celui qui en a parlé le plus raisonnablement. « Ceux qui démontreront , dit-il , que » cette *quadrature* est impossible , auront » résolu le problème à la rigueur. C'est » pourquoi il faut attendre que cette im- » possibilité soit démontrée , avant de con- » damner ceux qui s'appliquent à la réso- » lution de ce problème. » Il est bien sur- prenant et bien singulier de voir d'une part presque tous les savans s'accorder à faire très-peu de cas de cette découverte , et de voir en même temps d'une autre part tous les savans de tous les pays et de tous les siècles , et même les plus grands génies que la Providence ait donné au genre humain , s'efforcer de parvenir à cette même découverte. Les Archimède , Apollonius , Philon , Ludolphe de Cologne , Hyppocrate de Chio , Sharp , Machin , Metius , Newton , Leibnitz , Bernouilly , Lagny et tant d'autres , ont-ils donc tous cru n'employer leur temps et leurs travaux , qu'ils ont poussé même jusqu'à l'excès , que pour un sujet peu utile , et peu important par lui-même ? Pourquoi

donc ces grands hommes, tant anciens que modernes, l'ont-ils jugé digne de leur application? pourquoi ont-ils épuisé toutes les ressources de leur science, et fait mille efforts pour réussir dans cette même entreprise? C'est sans doute parce que tous ces génies supérieurs étoient intérieurement convaincus que la réussite de cette découverte devoit produire les plus grands avantages pour l'accroissement des sciences, et qu'il en devoit sortir un grand nombre de vérités utiles et inconnues aux hommes. Ils avoient bien raison. En effet, dans la nature tout s'opère par le moyen des courbes à l'égard des corps qui existent, soit au milieu des airs et des eaux, soit sur la terre, puisque la terre elle-même roule continuellement dans un cercle immense qui lui a été tracé par le doigt invisible du Créateur. Tout est donc subordonné à la combinaison des courbes. Comme la foiblesse de notre esprit ne nous permet pas d'en saisir tout d'un coup les rapports, il a donc fallu que l'homme s'appliquât d'abord à connoître les

proportions des différentes lignes droites, afin de parvenir ensuite, autant qu'il pourroit, à la connoissance des courbes. Le passage de la ligne droite aux courbes, et le lien imperceptible de la circulaire avec la ligne droite, sont donc une découverte la plus importante pour les hommes. Il en naîtra, pour ainsi dire, une géométrie nouvelle. Il y a des savans qui l'ont regardé comme le chef-d'œuvre de l'esprit humain. Enfin le ciel vient de donner aux hommes cette découverte; les bornes des connoissances humaines vont être reculées: c'est à Dieu seul que j'en attribue toute la gloire; je n'ai fait que découvrir son ouvrage; heureux si je puis par mes pénibles travaux honorer ma patrie! C'est la main elle-même du géomètre éternel, qui a rectifié la circonférence du cercle au milieu du quarré; et je n'ai fait que trouver cette ligne droite qui est égale à la ligne circulaire. Hélas! quelle confusion pour nous qui sommes si orgueilleux d'un peu de science, de reconnoître aujourd'hui cette ligne si simple et si admirable que

Dieu avoit tracée et mise sous nos yeux, et que nous avons cherchée depuis tant de siècles, sans jamais avoir pu la découvrir! Il en est de même à l'égard du phénomène du flux et reflux des mers. Les savans n'assignent point d'autre cause de ce phénomène que l'attraction de la lune, et cependant ils me permettront de leur représenter qu'ils sont encore à ce sujet dans la plus grande erreur. Le système du philosophe anglais relativement au flux et reflux, est rempli des contradictions les plus révoltantes (a). Je démontrerai bientôt de la

(a) L'étude particulière à laquelle je me suis livré, concernant le mouvement des mers, m'a conduit à la découverte d'un moyen sûr et facile pour augmenter considérablement la vitesse d'un vaisseau. Ce nouvel instrument de marine, simple dans sa construction, ne changera rien à celle des bâtimens, et n'exigera pas un seul bras de plus dans tout l'équipage, parce qu'étant une fois posé suivant la direction de la route que le pilote voudra prendre, il agira sans cesse de lui-même en poussant le vaisseau avec une égale force, de concert avec les vents. On en retirera un grand avantage pour avancer en route oblique, lorsque les vents se trouveront contraires; car alors, par la combinaison de l'im-

manière la plus simple et la plus évidente, que ce mouvement périodique des mers est le résultat de l'action constante et simultanée des deux mouvemens diurne et annuel

pulsion des vents et de celle que produira cette machine hydraulique , le bâtiment suivra nécessairement la diagonale , et s'écartera beaucoup moins de la direction de sa véritable route. Je dois prévenir que cet instrument de marine ne peut servir que sur les bâtimens à voiles ; et je garantis que la marche du vaisseau sera considérablement accélérée, d'un quart environ. J'avois déjà proposé au gouvernement , au commencement de l'an VI , de faire l'essai de ce nouvel instrument de marine sur un petit bâtiment de la Rochelle à l'Isle-de-Rhé , moitié à mes frais et moitié aux frais du gouvernement ; je demandois seulement qu'on m'assurât la récompense que j'aurois méritée. Le ministre de la marine m'écrivit qu'on *s'occuperait de ce travail , et qu'il m'en instruirait* ; mais les circonstances ne se trouvoient point favorables ; c'étoit quelques jours après le 18 fructidor : on étoit occupé d'autres affaires plus importantes , et sans doute ma proposition fut mise en oubli. Eloigné de cent lieues de la capitale , vivant dans le fond d'une campagne , sans ambition , je suis resté dans l'inaction à cet égard : cependant , quels avantages précieux ne retireroit-on pas de cette découverte , qui indiqueroit le moyen de rapprocher les deux mondes , et qui donneroit à leurs habitans une voie plus courte de communication ?

de la terre; j'en expliquerai toutes les circonstances possibles, qui tiennent toutes à une même cause physique; et notre esprit, en apercevant les divers rapports des effets avec la cause, se trouvera frappé de l'évidence de cette démonstration qui n'est appuyée que sur les lois simples de l'hydraulique et sur quelques principes de géométrie. Il ne restera plus aucun doute sur ce sujet important, qui donnera à tous les peuples l'idée de la puissance d'un Dieu qui fait circuler dans les cieux le globe immense que nous habitons, comme un grain de sable emporté par les vents au milieu des airs; alors l'existence du double mouvement de notre globe ne pourra plus être mise en problème, ni la chimère de l'attraction newtonienne dont je vous dévoilerai clairement les absurdités (b) : je donnerai cette

(b) On me feroit sans doute des reproches de ce que j'ose traiter d'*absurdité* le système du grand Newton, si je n'apportoïis aucune preuve de mon assertion; c'est pourquoi je donne ici un simple aperçu des contradictions révoltantes qui résultent de l'attraction appliquée

démonstration

démonstration peu après celle-ci ; mais j'ai voulu commencer par celle qui m'a coûté

au phénomène du flux et reflux des mers , et qui se présentent les premières à mon esprit. Voilà d'abord le phénomène : Deux fois par jour la mer monte sur ses rivages pendant six heures consécutives , après lesquelles elle reste douze minutes environ dans un état de repos , sans s'accroître davantage ; elle descend pendant six autres heures consécutives , au bout desquelles elle reste encore douze minutes environ dans son état de repos , sans décroître davantage ; puis elle remonte encore et redescend , en suivant toujours le même ordre et la même régularité.

On demande à Newton comment les eaux de l'Océan peuvent s'élever et s'abaisser en même temps dans chaque hémisphère : « C'est , dit-il , parce que l'attraction » de la lune et du soleil ne peut les élever dans un point » d'une hémisphère sans les faire élever également dans » un point opposé de l'autre hémisphère , par la raison » qu'il est impossible d'aplatir une sphère dans deux » points de l'horizon , sans faire élever le méridien dans » deux points opposés. » *Absurdité.* C'est abuser des mots aux dépens du bon sens. Oui , sans doute , si je prends entre mes mains une boule de cire molle , et si je la presse également , la boule s'aplatira nécessairement dans les deux endroits où je la comprimerai , tandis qu'elle s'allongera dans deux points opposés : mais quelle différence entre la force attractive de la lune , et la force compressive de mes mains ! Ma main , en comprimant la boule de cire molle , exerce à-la-fois deux

le plus de peines et de travaux , qui procurera aux hommes le plus d'avantages, et

actions qui se font dans un sens opposé l'une à l'autre ; on conçoit facilement l'effet du soulèvement qui en doit résulter dans deux autres points contraires : mais la lune n'exerce sur les eaux des deux hémisphères qu'une seule et même action , dans le même sens direct au centre de la lune , et par conséquent l'effet ne peut être le même. Afin de le prouver encore plus clairement , servons-nous de la figure I. Soit *A* le globe de la terre , soit *B* la lune ; les eaux supérieures du globe situées au point *C* seront attirées suivant une ligne perpendiculaire au centre *B* de la lune. Soit la force attractive = 3 ; comme l'attraction se fait toujours en raison inverse du quarré des distances , les eaux inférieures du globe situées au point *S* seront moins attirées. Soit la force qui les attire = 2 ; or , il est facile de voir que la force attractive de la lune qui agit sur les eaux situées aux points *C* et *S* , doit nécessairement faire élever vers elle les eaux qui se trouvent au point *C* , et doit par conséquent attirer , suivant la même direction , celles qui se trouvent au point *S* ; mais la masse de la terre empêche celles-ci de suivre cette direction. Tant qu'elles seront attirées , elles resteront donc comprimées contre sa surface ; et , bien loin de s'élever , elles formeront une cavité : car la force qui les attire , comme 2 , suivant la direction de la ligne *SAB* , est la même force centripète qui agiroit comme 2 , suivant la direction de la ligne *RSA*. Elles seroient donc comprimées. Donc il n'y auroit point d'élévation au point *S*. Cette démonstration est évidente.

quia été jusqu'à ce jour regardée comme une chose entièrement impossible.

2°. On demande à Newton pourquoi les marées retardent tous les jours de quarante-huit minutes environ : « C'est , répond-il , parce que la lune retarde chaque » jour de quarante-huit minutes à notre méridien , et » fait retarder aussi les *marées*. » Autre absurdité. La mer emploie six heures à monter , et elle reste dans un même état de repos douze minutes environ , après lesquelles elle descend ; elle emploie encore six heures à descendre ; elle reste ensuite dans un même état de repos douze minutes environ , après lesquelles elle commence à remonter ; et comme le flux et reflux arrivent chacun deux fois par jour , ce qui produit , avec les deux flux et reflux , quatre intervalles de repos , qui forment le total de vingt-quatre heures et quarante-huit minutes. Voilà la cause naturelle de ce retard de quarante-huit minutes environ , que les *marées* éprouvent d'un jour à l'autre. Ce n'est donc pas la lune qui est la cause du retard des marées. Il faudroit prouver que le satellite de la terre s'arrêteroit aussi quatre fois pendant un même espace de temps ; qui correspondroit à celui des marées : ce qui n'est pas , assurément ; car le retard de la lune ne provient que de son mouvement périodique autour de la terre , combiné avec le mouvement diurne de notre globe.

3°. On demande à Newton pourquoi les marées sont toujours plus fortes lorsque la lune se trouve dans l'équateur : « C'est , répond-il , parce que les eaux sont » plus légères sous l'équateur , et par conséquent plus

Toute ma démonstration de la *quadrature du cercle* et de la *circulature du*

» faciles à être attirées. » Voilà encore une autre absurdité. Il est constaté , d'après plusieurs expériences faites par les voyageurs , que les eaux des mers de l'équateur sont beaucoup plus salées que celles des autres mers ; soit parce que l'évaporation est plus grande entre les tropiques , et qu'il s'y dépose une quantité de sel plus considérable ; soit parce que les mers des pôles reçoivent beaucoup d'eaux douces qui proviennent de la fonte des neiges et des glaces. Or, la différence entre le pied cube d'eau salée et celui d'eau commune est de soixante-treize à soixante-dix environ : donc, la gravité spécifique des eaux est plus forte sous l'équateur que dans tous les autres climats.

4°. On demande à Newton pourquoi le flux et le reflux ne sont plus sensibles après le 65° degré de latitude : « C'est , dit-il , parce que la lune n'exerce son attraction » que sur les mers de l'équateur ; et partout ailleurs le » flux et reflux ne doivent arriver que par communication ; et cette communication doit être insensible pour » les eaux qui en sont fort éloignées, telles sont celles qui » se trouvent au-delà du 65° degré de latitude. » Cette réponse est spécieuse et pourroit en imposer ; mais elle est entièrement fausse. Il s'ensuivroit de ce raisonnement que la force du flux et du reflux devoit diminuer insensiblement , à mesure qu'on s'éloigneroit des tropiques ; mais , au contraire , les eaux s'élèvent davantage sur les côtes qui en sont éloignées. Sous l'équateur , l'élévation est de douze pieds , tandis que les eaux s'élèvent à plus

quarré est fondée sur cette proposition évidente qui nous étoit demeurée inconnue jusqu'à ce jour. *Le cercle est la figure essentielle de la nature, qui se change en toutes sorte des figures, et celles-ci n'en sort que des modifications différentes qu'il s'approprie et qu'il varie à l'infini.* Ce lemme fondamental est prouvé par un dilemme décisif : *ou le cercle peut se changer en toutes sortes de figures, ou il ne peut se changer en aucun. Il n'y a point*

de trente pieds dans les ports de Brest, de Saint-Malo, lesquels sont situés au 48° degré de latitude; de 40 pieds à Bristol; et dans les détroits situés vers le 60° degré, le flux parvient encore à trente pieds de hauteur. Je ferai connoître bien clairement que le véritable flux et le vrai reflux doivent nécessairement arriver sur nos côtes, et non pas sous l'équateur. Je ferai connoître quelle est cette barrière que l'architecte du monde a posée au 65° degré de latitude, et qui devient insurmontable aux eaux. Je pourrais citer ici, si je le voulois, autant de contradictions dans l'application du système newtonien au flux et reflux, qu'il y a de circonstances qui accompagnent ce beau phénomène de la nature. O peuples! pourquoi l'erreur applaudie trouve-t-elle toujours un accès facile auprès de vous! tandis que la vérité, souvent méprisée, rencontre mille obstacles avant de parvenir à votre connoissance, et avant de pouvoir vous persuader?

de milieu , parce que tous les points de la circonférence étant parfaitement égaux , le cercle n'a rien par lui-même qui puisse le déterminer à prendre plutôt telle figure que telle autre. C'est de cette vérité géométrique , que découlent toutes les autres qui m'ont conduit à la solution du problème de la *quadrature*. Il s'agissoit dans cette découverte non-seulement de trouver un moyen de changer le cercle en quarré et le quarré en cercle , mais encore il falloit que ce moyen pût être employé facilement par tout le monde ; car une découverte qui ne serviroit qu'aux plus grands savans et qui exigeroit les connoissances les plus rares , ne seroit plus utile à toute la société. La méthode que nous enseignons , ou plutôt que le géomètre éternel nous a donnée lui-même , est la plus simple et la plus facile : lui seul pouvoit la donner. C'est en suivant cette méthode , que non-seulement nous trouverons dans tout quarré la surface entière du cercle dont il est le quarré , mais encore nous trouverons dans chacune des quatre

lignes qui forment le quarré , le quart de la surface de ce même cercle.

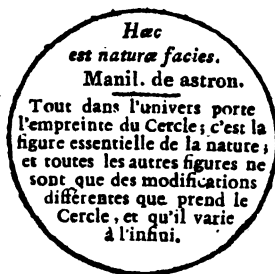
Notre monde est rempli de contrariétés. L'une des plus grandes, qui frappera d'étonnement tous les esprits , c'est de voir celui qui n'a appris que de lui-même la géométrie, faire une découverte géométrique qui, depuis l'origine des siècles, a été vainement tentée par une multitude d'hommes les plus approfondis dans cette science. D'où cela peut-il provenir ? en voici la raison : Il en est de la géométrie comme de toutes les autres sciences où l'on a fait quelques découvertes importantes : rarement elles ont été faites par ceux qui étoient les plus approfondis dans cette même science ; cela provient de ce que le savant ne peut appliquer trop long-temps son esprit à l'examen des petits objets qui lui paroissent trop simples et peu importants. Il s'élève et va chercher bien loin ce qui souvent est auprès de lui, tandis qu'un autre moins instruit que lui de cette même science, travaille plus difficilement, et se

trouve forcé par conséquent de tenir plus long - temps son esprit appliqué sur un même objet. Rien de ce qui est petit, rien de ce qui est simple ne lui échappe : il considère tout ; et dans une machine composée, ce sont les petites roues qui font aller les grandes. On en verra la preuve dans cet ouvrage. Mais en général tel est le sort de la plupart des inventions humaines. Nos plus belles découvertes ont été faites par ceux qui sembloient devoir moins les faire. Celui qui a inventé la poudre à canon, n'étoit pas un homme de guerre. L'imprimerie n'a pas pour son auteur un homme de lettres, ni la boussole un marin, ni le télescope un astronome, etc. etc.

IDENTITÉ

GÉOMÉTRIQUE

DU CERCLE ET DU QUARRÉ.



CHAPITRE PREMIER.

Du Cercle, et de sa nature.

LE cercle est la plus parfaite de toutes les figures qui peuvent exister. Sa perfection consiste dans sa grande simplicité, et dans une juste égalité qui règne entre tous ses points, soit à l'égard du centre autour duquel ils sont placés, soit à l'égard d'eux-mêmes; c'est-à-dire, que tous les points qui forment la circonférence d'un cercle se trouvent également distans du point central auquel ils correspondent, et qu'ils sont

2 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

également inclinés les uns aux autres, entièrement semblables, comprenant les mêmes divisions, sous-divisions, et par conséquent les mêmes nombres dont la somme fait le total de la circonférence. Le cercle est de toutes les figures celle qui comprend le plus grand espace dans le même périmètre, ou dans un circuit égal. Il est de toutes les figures la seule qui ne présente à l'œil ni commencement, ni fin, parce que tous ses points étant parfaitement semblables et égaux entre eux, on n'en peut pas remarquer un plutôt qu'un autre par lequel on doive commencer ou finir. Ce qui nous surprend, c'est que toutes les parties de sa circonférence peuvent se diviser à l'infini, et cependant que chacun des points constitutifs de cette circonférence est indivisible par lui-même; car, si l'on pouvoit le diviser, on pourroit en prendre une partie plus grande ou plus petite que l'autre; on pourroit en distinguer une partie supérieure et une autre inférieure, en sorte que celle-ci se trouveroit plus près du centre et seroit conséquemment plus inclinée, tandis que l'autre partie la seroit moins. Or cette hypothèse ne peut être admise à l'égard du cercle, dont tous les points sont essentiellement égaux, et entre eux et à l'égard de leur centre. Ses divisions se trouvent toujours les mêmes dans les plus grands cercles comme dans les plus

petits , quelle que soit la partie que l'on divise. Il embrasse l'univers entier dans sa circonférence ; et toutes les parties de l'univers correspondent à son point central. La figure circulaire est donc la plus simple , et en même temps la plus incompréhensible.

Les Anciens avoient bien raison de représenter la divinité sous l'emblème d'un cercle. En effet, cette figure est celle qui domine dans toute la nature ; et nous pouvons dire avec Manilius : *Hæc est naturæ facies ; c'est la forme que prend la nature elle-même.* Toutes les autres figures , telles que notre esprit puisse les imaginer , ne sont que les différentes modifications du cercle , que celui-ci s'approprie , et qu'il sait varier à l'infini. C'est par le moyen du cercle , que les grands mouvemens des globes célestes s'opèrent sans aucune interruption , depuis l'origine des siècles , dans l'espace immense des airs. C'est du mouvement en ligne circulaire que résultent cet ordre et cet enchaînement physique qui règne dans la production de tous les effets naturels. Ce qui s'opère chaque jour à nos yeux , n'est qu'un mécanisme perpétuel ; dont les lois sont calculées et renfermées dans des courbes ; et la continuité de ce mécanisme ne peut subsister dans toutes les parties , depuis les plus grandes jusqu'aux plus petites , que par l'effet d'un mouvement qui ne

cesse de communiquer et de correspondre de la circonférence à un point central.

Un corps qui seroit toujours en mouvement, et qui dans son cours suivroit sans cesse la direction d'une ligne droite, est un corps chimérique qui ne peut exister dans l'ordre de la nature; car tout corps qui se meut suivant une ligne droite, doit nécessairement tendre vers un point, et ce point doit être placé sur la ligne même qui est parcourue : qu'on recule tant qu'on voudra le lieu où est situé ce point; il faut de toute nécessité qu'il existe, et qu'il se trouve placé dans la ligne que le corps décrit; autrement, le corps cesseroit de suivre sa même direction. Mais, par l'hypothèse, il est supposé avoir un mouvement continuél suivant une ligne droite; en la suivant, il doit donc parvenir tôt ou tard à ce point, vers lequel il tend sans cesse; ou bien l'on sera forcé de dire que la ligne est prolongée à l'infini. Mais une ligne qui est infinie, n'est plus une ligne, et n'existe point dans l'univers. L'univers lui-même a ses bornes marquées par la main de son auteur, qui, lui seul, est infini. D'ailleurs, il est absurde de prétendre et de vouloir soutenir qu'un corps, mis en mouvement, tend vers un point qui se trouveroit reculé à l'infini, puisque nous comprenons par le mot *point* un lieu fixe et déterminé; mais

dans la ligne supposée infinie, on ne peut concevoir aucun point fixe où la ligne puisse être terminée. Enfin, un corps qui seroit supposé parcourir une ligne droite prolongée à l'infini, seroit un corps isolé dans la nature, lequel ne correspondroit à aucun autre; ce qui est, encore, absurde et contraire à l'expérience, qui nous apprend que toutes les parties du monde sont enchaînées les unes aux autres par un lien physique; et le bout de cette chaîne immense est dans la main de celui qui l'a formée. Nous sommes donc forcés de reconnoître qu'un corps ne peut avoir un mouvement perpétuel sans décrire quelque courbe, et sans tendre vers un point, autour duquel une force étrangère le fait mouvoir continuellement, en l'éloignant sans cesse de ce même point central (1). Ainsi, tous les corps

(1) J'appelle *point central*, le lieu où tend sans cesse le corps qui est mis en mouvement. Qu'on place le centre là où l'on voudra ! sur une ligne droite : j'y consens ; alors le corps parcourra cette ligne ; et n'étant poussé que par la *force centripète*, il suivra la ligne la plus courte, qui le conduira au point où il tendra. La ligne parcourue deviendra le rayon, et ce point où il tendra, sera le centre du cercle que le corps auroit parcouru s'il eût été poussé également par la *force centrifuge*. Tout corps, dès qu'il existe, doit être en mouvement, parce que tout se meut dans la nature ; dès lors qu'il tend vers un centre auquel il correspond, il ne cesse

dans l'univers ont un centre particulier auquel ils correspondent ; et chaque système de la nature demeure attaché à un centre général , autour duquel roule notre globe , qui n'est qu'une petite roue de la grande machine dont l'architecte est *Dieu*. Qu'on prolonge et qu'on étende aussi loin que l'imagination peut le faire , la circonférence du grand cerole , il faudra toujours qu'il y ait un rapport , une correspondance entre les différens points de la circonférence et le centre général. Si l'on suppose , encore une fois , le rayon prolongé à l'infini , dès lors on ne peut

pas un seul instant de se mouvoir pour y parvenir , ou bien il sera retenu malgré lui par une force étrangère , et quoique retenu , il ne cessera de tendre en ligne droite vers ce même point , c'est la cause qui produit sa masse. Dira-t-on qu'on peut supposer un corps existant , sans tendre vers un centre ? Mais ce seroit dire que ce corps existe sans avoir par lui-même aucune masse , aucun poids , aucune quantité de matière déterminée ; et alors , ce ne seroit plus un corps. Et quelle force faudroit-il pour donner du mouvement à un pareil corps ? Quel seroit le degré de vitesse qu'il recevrait ? puisqu'une force n'est estimée qu'en raison de la résistance qu'elle éprouve de la part du corps qui est mu , ou plutôt qu'en raison de la masse du corps qu'elle fait mouvoir. Concluons qu'il n'y a point de mouvement perpétuel , sans supposer un centre de ce mouvement , et que tout se meut dans le *cercle immense de la nature. Hæc est naturæ societas.*

plus concevoir de rapports , il n'y a plus aucune proportion entre les diverses parties du *grand Tout* , parce que rien ne peut être mesuré avec l'infini qui n'a point de mesure. Il est donc certain que les sphères célestes , en se communiquant les unes aux autres , décrivent des orbes plus ou moins réguliers autour du centre commun , puisque leur mouvement est perpétuel ; et quoique ces grands corps se meuvent en parcourant des courbes , qui peuvent s'éloigner plus ou moins de la circulaire , leurs orbes dérivent toujours d'un cercle primordial , auquel ils ont un rapport essentiel.

Dans les airs , sur la terre , tout porte l'empreinte du *cercle* (1) , depuis ces globes immenses , qui roulent sur la voûte brillante des cieux ; jusqu'à la pierre qui , en tombant dans l'eau , forme naturellement un rond. La masse du globe sur lequel nous marchons , a été pétrie par la main du Créateur en forme circulaire : *Tellus condita in orbem undique surgentem pariter pariterque cadentem. Manil. de Astronom.* Ces grands végétaux qui élèvent majestueusement

(1) *Hæc est Naturæ facies , sic Mundus et ipse
In convexa volans , teretes facis esse figuras
Stellarum , Solisque orbem Lunæque rotundum.*

Manil. lib. de Astronom.

8 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

leurs têtes jusque dans les nues , s'accroissent eux-mêmes en prenant une forme cylindrique ; et renversés par les coups redoublés de la hache du bûcheron , ils offrent à nos yeux , dans leur coupe intérieure , les différens cercles concentriques qui attestent les nombreuses années de leur existence.

Lorsque le soleil éclaire une partie de notre horizon , tandis que l'autre côté opposé est obscurci par un nuage épais , les rayons partis de cet astre vont se briser dans la nue , et tracent à l'instant un arc paré des plus riches couleurs ; et si le nuage se résoud en pluie , les gouttes d'eau tombent en s'arrondissant.

C'est par le moyen du cercle que s'opère dans nos yeux l'un des plus grands prodiges de la lumière. Une multitude d'objets épars çà et là devant nous , viennent tous à la fois se peindre au fond de notre œil et s'y réunir sans aucune confusion. Les rayons de lumière qui nous apportent ces divers objets de différens angles de l'horizon , se brisent dans le fluide de nos yeux ; en se brisant , ils se plient nécessairement , et ils projettent , en sortant , sur la rétine une courbe qui devient un point lumineux , où tous les objets se rangent chacun à leur place , sans pouvoir nullement se confondre. C'est par le seul secours du mouvement en ligne circulaire , que

le souverain architecte du monde a mis un frein assuré à la fureur des flots , et qu'il rabaisse à l'instant ces montagnes d'eau qui , soulevées par la tempête , semblent vouloir inonder nos rives. C'est par la commune section des deux plans circulaires du double mouvement de notre globe ; que le Créateur a trouyé le moyen admirable de renouveler constamment, et d'une manière insensible , les eaux inférieures qui occupent les abysses profonds de l'Océan, en les échangeant avec celles qui sont sur la surface : sans ce changement mutuel et continuel des eaux du fond avec celles de la surface , les eaux inférieures ne tarderoient pas à se corrompre, d'autant plus qu'elles reçoivent toutes les immondices de la terre et les dépouilles de cette multitude incroyable d'animaux qui peuplent le sein des mers (1). Notre

(1) Ce mouvement général des mers, qui leur est absolument nécessaire pour conserver la pureté de leurs eaux, est un prodige singulier qui s'opère continuellement à nos yeux, sans que nous nous en doutions, parce qu'il se fait d'une manière insensible. Cet effet merveilleux, que nous ignorons encore, est le produit de la différence qui se trouve entre la force du grand mouvement de notre globe, et la force de celui qui est diurne. Il ne faut pas croire que le mouvement de l'Océan ne consiste que dans un balancement régulier de ses eaux, qui sont transportées de droite à gauche et de gauche à droite. Suivant cette hy-

sang circule sans cesse dans toutes les parties de notre corps par mille routes différentes, et coule avec rapidité dans des canaux dont la forme arrondie ne peut ralentir son mouvement. Ainsi, l'homme imitant les ouvrages de l'auteur de la nature, a donné la même forme à ces tuyaux cachés qui conduisent au milieu de nos villes l'eau jaillissante des fontaines. Le fluide magné-

pothèse, les corps corruptibles déposés dans le fond rouleroient avec les mêmes eaux qui les entourent, et seroient portés avec elles d'un côté et ensuite reportés de l'autre. Il n'est personne qui, en réfléchissant un peu, ne comprenne que ce simple balancement de la masse des mers ne suffiroit pas pour épurer les eaux du fond, et pour les dégager entièrement du dépôt infect de tous ces corps corrompus qui se trouvent placés à neuf cents pieds de profondeur. D'ailleurs, l'expérience nous démontre que l'eau de la mer, conservée dans un vase, se corrompt beaucoup plus facilement que l'eau douce : à plus forte raison les eaux qui occupent le fond du bassin profond et immense des mers. Je démontrerai, d'après les lois de l'hydraulique, comment l'architecte habile du monde a trouvé le moyen admirable d'échanger continuellement et insensiblement les eaux du fond des mers avec celles de la surface, et de les retourner, pour ainsi dire, *sens dessus dessous*, sans exposer cependant les rivages à être submergés, et sans ôter à l'homme audacieux la liberté de naviguer et de parcourir à son gré la vaste étendue des mers.

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 17

tique circule autour des corps ; et c'est par le mouvement en ligne circulaire que les corps électrisés nous offrent mille phénomènes étonnans. Le son qui frappe nos oreilles , ne parvient à nous qu'en produisant dans l'air un grand nombre d'ondulations qui s'étendent toujours de plus en plus en forme circulaire et concentrique. Le point d'où le son part , en est le centre : telle on voit cette suite non interrompue de cercles qui se forment sur la surface d'une eau frappée par la chute de quelque corps étranger. Enfin, c'est par le moyen du cercle que l'homme vient à bout d'exécuter les plus grandes choses. Avec son secours , notre bras foible élève à des hauteurs considérables des masses énormes de rochers ; il transporte là où il nous plaît les fardeaux les plus pesants ; il fait réduire en farine les grains qui nous nourrissent. Avec le secours du cercle , le savant mesure la surface entière de la terre , et détermine la distance des corps les plus éloignés ; l'artiste habile construit ces instrumens merveilleux , dont les uns brûlent , enflamment en un instant , réduisent en cendres les corps combustibles , et dont les autres étendent notre vue au loin et la prolongent jusqu'au fond des cieux. Avec son secours , l'ouvrier industrieux fait mouvoir sans cesse le pendule , qui détermine d'une manière uniforme chaque mesure du temps. C'est par la

moyen des courbes, que l'homme audacieux se construit un bâtiment mobile qui le transporte sur l'élément perfide dans un monde nouveau. C'est avec le secours du cercle, que le pilote, égaré au milieu des mers, après avoir essuyé une horrible tempête, cherche un point fixe dans les cieux, qui lui fait reconnoître le lieu où il se trouve placé sur le globe de la terre, et alors il reprend avec sécurité la véritable route dont les vents orageux avoient écarté son vaisseau. En un mot, c'est au cercle que nous devons tous les prodiges de la nature et de l'art (1).

(1) Lorsqu'on parle au Public de cercles, d'arcs, de lignes courbes, la plupart des hommes, accoutumés à ne juger des choses que par la première idée qu'ils s'en sont formée, s'imaginent que leur usage n'est point d'une grande utilité pour un peuple. Ils regardent cette sorte de connoissances comme le partage de quelques personnes oisives, et peut-être même comme des rêveries qui sont fort inutiles : tous ceux qui pensent de cette manière, sont dans la plus grande erreur. Qu'ils apprennent que c'est la combinaison des lignes courbes et circulaires qui a procuré à toutes les nations policées et civilisées les plus grands avantages dont elles jouissent dans la société. Sans cette connoissance particulière, l'homme n'auroit pu diviser également toute l'étendue d'un terrain, et assigner à chacun la portion qui lui appartient ; l'homme n'auroit pu élever ces superbes bâtimens qui embellissent au dehors le sein de nos villes, et qui nous fournissent au dedans

Le cercle est donc la figure essentielle qui existe dans le monde. Cette vérité est si incontestable, que le cercle lui seul comprend toutes les autres figures, dont il établit les différens rapports ; c'est par lui que le géomètre connoît la grandeur de toutes les lignes qu'il veut mesurer. Le cercle se change en toutes sortes de figures possibles, et il en prend toutes les proportions ou toutes les modifications. C'est le véritable Protée qui existe sous mille formes différentes. Bien loin que le cercle, ainsi qu'on l'a cru jusqu'à ce jour, ne puisse pas être changé en un quarré ; au contraire, il est de son essence, il est de sa nature de se transformer de lui-même

toutes les commodités de la vie, en nous offrant un abri assuré contre les injures de l'air. Je ne dirai point à ces hommes qui affectent du mépris ou de l'indifférence pour ce qu'ils ne connoissent pas, que c'est la *cycloïde* qui nous a servi à régler d'une manière uniforme toutes les vibrations du pendule ; que c'est la parabole qui nous a servi à déterminer sûrement le jet des bombes ; mais je leur dirai : jetez les yeux sur ce qui vous environne, partout vous ne verrez que les effets admirables de la combinaison des lignes courbes et circulaires. C'est à ceux qui se sont livrés entièrement à cette étude que vous devez la plupart des choses qui vous servent tous les jours, soit pour fournir aux besoins de la vie, soit pour en augmenter les agrémens.

14 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

en un quarré , avec lequel il se trouve lié si étroitement, qu'il en est absolument inséparable , et qu'il est impossible de concevoir le mécanisme du cercle, sans l'union intime du quarré , et le mécanisme du quarré , sans l'union intime du cercle.

CHAPITRE II.

De la Quadrature du Cercle.

La Quadrature du cercle consiste à changer par une méthode géométrique la surface entière du cercle en celle d'un quarré sans aucune augmentation ni diminution quelconque. Ce fameux problème a occupé vainement jusqu'à ce jour tous les savans de tous les temps et de tous les pays. D'après leurs travaux, les uns ont conclu que la solution de ce problème étoit une chose impossible, mais aucun ne l'a démontré. Les autres, d'un ton plus décisif, ont dit que celui qui la trouveroit ne rendroit pas un grand service aux Sciences ; mais ceux-là on dit ce qu'ils ignoroient. Ils n'ont point considéré qu'il n'en étoit pas de la *quadrature du cercle*, comme de celle de toutes les autres figures ; parce que le cercle est la figure

essentielle de la nature, parce que toutes les autres dépendent de lui et ont un rapport particulier avec lui. Sans doute ils auroient compris que la découverte de sa *quadrature* devoit produire des avantages qui s'étendroient aux autres figures, et embrasseroient toute la géométrie.

Dans la quadrature du cercle, il faut distinguer trois objets principaux; 1°. Le *rapport de la circonférence au diamètre*; 2°. la *quadrature du cercle*; 3°. la *circulature* (1) du *quarré*. Le premier consiste à trouver par le calcul la juste valeur de la ligne qui forme la circonférence d'un cercle jusque dans ses dernières parties. L'autre consiste à trouver géométriquement un quarré égal en surface à un cercle donné. Le troisième est la surface d'un quarré, changé en celle d'un cercle. Ainsi l'on voit que ce sont trois choses distinctes, quoique liées les unes aux autres. Je pense que c'est à tort que les géomètres ont confondu ensemble la *quadrature du cercle*, et le rapport de la circonférence à son diamètre. C'est à tort qu'ils ont dit que la

(1) Le mot *circulature* provient du mot latin *circulus*, cercle, ou *circulariter*, fait en forme d'un cercle. Elle consiste à trouver une méthode géométrique pour changer en cercle un quarré; c'est le contraire de la *quadrature*.

connoissance de l'un entraînoit nécessairement avec elle la solution de l'autre. Il est bien vrai que tous les deux se trouvent liés ensemble, parce que tout se tient et demeure enchaîné dans ce problème, qui embrasse la géométrie entière. Mais on pouvoit trouver l'un sans l'autre. Celui-ci est un théorème par lequel il s'agit de fixer en nombres la mesure exacte de la circonférence; l'autre est un problème qui consiste à employer un moyen géométrique pour faire un quarré égal en surface à un cercle. Celui-ci nous donne la mesure de la circonférence en ligne, et celui-là en nombres. Telle est leur différence. Elle est sensible. En effet, si l'on connoissoit par des nombres complets quel est le véritable rapport du diamètre à la circonférence; et si ce rapport exprimé en nombres, étoit facile à saisir dans la pratique, le problème de la *quadrature* se trouveroit bientôt résolu. Je m'explique : si, par exemple, le nombre de ce rapport étoit égal à celui de 7 à 22, il seroit aisé de tirer une ligne qui donneroit la mesure exacte de la circonférence, en prenant trois fois la longueur du diamètre, plus la septième partie de ce même diamètre; ce qui feroit un total de 22. Mais il n'en est pas ainsi. Le calcul de ce rapport comprend une suite de divisions, de sous-divisions et sous-sous-divisions qui s'étendent à l'infini. Or toutes ces di-

verses

versés parties ne peuvent être saisies dans la pratique, à moins que d'avoir une méthode géométrique pour opérer d'une manière infallible. Sans cette méthode, quand l'homme auroit l'avantage de connoître la dernière fraction où s'étend le calcul de ce rapport, il lui seroit encore impossible de s'assurer si la ligne qu'il traceroit, donneroit la juste mesure en nombres de la circonférence. On pouvoit donc découvrir l'un, sans trouver l'autre. C'est ainsi qu'on peut avoir la diagonale d'un quarré, quoique cette ligne ne puisse pas être exprimée en nombres. Il en est de même à l'égard de la circonférence et du diamètre, qui sont incommensurables en nombres. C'est par une suite de cette erreur presque générale, que plusieurs géomètres, après avoir cherché inutilement le rapport du diamètre à la circonférence, ont conclu faussement que celui qui découvreroit la *quadrature*, ne rendroit pas un très-grand service aux sciences, parce qu'on avoit approché si près de la vérité, qu'on peut facilement s'en passer aujourd'hui. Tous ces savans, que je regarde assurément comme mes maîtres, mes permettront de leur dire qu'ils se sont trompés beaucoup à ce sujet; ils seront les premiers à convenir de leur erreur; 1°. parce que nous venons de prouver que l'un n'est pas l'autre; 2°. parce qu'en supposant même que l'un seroit une suite nécessaire de

l'autre , il faudroit que tout l'avantage qui résulteroit de la *quadrature* , consistât simplement à connoître l'exacte mesure du rapport du diamètre à la circonférence. Mais ce seroit là le moindre de tous les avantages.

*Avantages précieux qui résultent de la
Quadrature du Cercle.*

La découverte de ce grand problème met entre les mains des hommes la principale clef de la géométrie ; 1°. parce qu'elle leur ouvre la solution d'un grand nombre d'autres problèmes intéressans , qui leur sont demeurés inconnus jusqu'à ce jour ; 2°. parce qu'elle augmente leurs connoissances , et les rend moins relatives ; 3°. parce qu'elle leur découvre le vrai mécanisme du cercle et du quarré , en leur montrant le lien imperceptible et caché qui les unit étroitement ; en sorte que ces deux figures qui nous paroissent être si contraires et si opposées entre elles , se trouvent naturellement formées l'une de l'autre et liées ensemble mutuellement d'une manière inséparable ; 4°. parce qu'elle découvre à l'homme la nature de cette ligne admirable qui , tirée d'un angle à l'autre angle opposé , partage également le quarré , et qui a été jusqu'à présent l'écueil de l'esprit humain ; 5°. parce qu'elle va

donner au géomètre une plus grande facilité pour opérer dans la pratique. On a toujours parlé de la quadrature du cercle, sans connoître les avantages qui résulteroient de cette découverte. L'on a cru que ce problème ne consistoit qu'à trouver simplement la surface d'un quarré qui fut égale à celle d'un cercle. On étoit bien loin de comprendre toute l'étendue qu'embrasse la solution de ce grand problème, qui devient le fondement principal de la géométrie, soit qu'elle considère les lignes, soit qu'elle compare des surfaces, soit qu'elle mesure des solides. Elle s'étend jusqu'à cette partie transcendante qui traite des lignes courbes de différens genres. Car alors on aura la quadrature de l'ellipse. On pourra connoître le lien qui enchaîne le cercle à toutes les autres figures, qui sont autant de modifications différentes que prend le cercle. Ainsi l'on découvrira la surface véritable d'une sphère, et sa solidité. Les degrés de longitude qui servent à mesurer notre globe, deviendront plus réguliers. Au reste, je laisse à des hommes plus habiles que moi, et au temps, plus habile encore que tous, le soin de faire valoir les avantages précieux de cette découverte, qui sera une source féconde de lumières, où le savant ne cessera de puiser, et d'où il retirera de nouvelles connoissances qui vont reculer de plus en plus les bornes de l'esprit

l'autre, il faudroit que tout l'avantage seroit de la *quadrature*, consistant à se faire une idée de la nature? Que de de tous les avantages.

Avantages pré

Qu La dé les m

THÉORÈME FONDAMENTAL.

La circonférence du Cercle et son diamètre sont incommensurables ; c'est-à-dire, que leur rapport géométrique ne peut être exprimé en nombres.

Le rapport ou la raison géométrique est la manière dont une grandeur en contient une autre. Pour avoir la raison géométrique de la circonférence au diamètre, il faut les comparer ensemble ; et pour faire cette comparaison, il faudroit connoître en nombres la juste mesure du périmètre de la figure circulaire, et en même temps celle du diamètre, sans aucun reste. Or, je dis que cela est impossible à l'homme. Avant d'en faire la preuve, il est nécessaire de considé-

le vrai mécanisme du cercle et sa composition naturelle. La ligne circulaire est composée d'infinité de points qui, comme nous l'avons vu, ont chacun les mêmes divisions et mesurent les mêmes nombres dont le total fait la mesure entière. Or, ces divers points sont tous perpendiculaires à chaque point du diamètre auquel ils correspondent; de façon qu'il n'y a aucun point de la circonférence d'où l'on ne puisse abaisser une perpendiculaire sur le diamètre. Représentez-vous donc un corps quelconque; supposez *a*. figure 1^{re}, qui soit en mouvement et qui décrive la courbe *a. c. d. e. g.* Ce corps ne peut parcourir cette courbe sans être sollicité en même temps par deux forces constantes et égales, dont l'une suit la direction de la tangente *a. b.*, que nous appelons *force de projection*; laquelle est sans cesse variable quoiqu'uniforme; et l'autre est *la force centripète*, qui demeure toujours constante et fixée invariablement au point central *m*, et pousse le corps suivant la ligne *a. m*. On comprendra facilement que la branche du compas qui est mise en mouvement, pour tracer le cercle, représente le corps mû par la force de projection, tandis que l'autre branche du compas, qui reste immobile, représente la force centripète toujours fixée et attachée à ce même point, autour duquel se trouvent ran-

gés tous les points constitutifs de la figure circulaire. Ces deux forces sont donc nécessairement égales, en sorte que l'une ne peut surpasser l'autre. De là cette égalité parfaite qui règne dans l'inclinaison de tous les points du cercle. Car quoiqu'il n'y ait qu'une branche du compas qui forme visiblement la ligne circulaire ; cependant il est constant que les deux branches travaillent de concert, et concourent simultanément à la formation entière de cette figure, puisque tous ses points constitutifs ne peuvent se ranger circulairement autour d'un même centre que par le moyen de l'autre branche du compas qui, immobile en apparence, travaille sans cesse à retenir celle qui est mise en mouvement ; et de cette manière elle rend nécessairement égale l'inclinaison de chacun des points de la circonférence. D'après ces notions claires et évidentes, il s'agit de démontrer que la circonférence *a. c. d. e. g.* et le diamètre *a m a* fig. 2^e, comparés ensemble géométriquement, sont incommensurables.

D É M O N S T R A T I O N.

1^o. Soit le corps *a*, fig. 1^{re}, mis en mouvement pour tracer le cercle *a. c. d. e. g.* fig. 2^e. Au premier instant ce corps sera donc poussé par une force de projection qui aura sa direction suivant la tangente *a. b.*, et par une autre force qui aura sa

direction suivant la ligne perpendiculaire $a. m.$; alors ce corps, obéissant à ces deux forces, doit parcourir une ligne commune aux deux directions qu'il en reçoit: c'est pourquoi il formera le point $c.$, lequel est le premier point de la diagonale $c. f.$ qu'il acheveroit de parcourir en son entier, si à l'instant même il n'étoit pas enoore poussé par la force de projection suivant la tangente $c. b.$, et en même temps par la force centripète $c. m.$ qui l'empêche d'obéir à la seule force de projection; ainsi de ces deux nouvelles directions $c. b.$ et $c. m.$, le corps a formera le second point d de la circonférence, lequel est le premier point de la diagonale $d. f.$ que ce corps parcoureroit infailliblement dans son entier, s'il n'étoit pas encore poussé par la force de projection qui ne cesse d'agir sur lui suivant la tangente $d. b.$; tandis que la force centripète, qui agit aussi continuellement, le pousse suivant la ligne $d. m.$ Le corps $a.$, obéissant toujours aux deux directions qu'il reçoit, formera le troisième point e de la circonférence, lequel est le premier point de la diagonale $e. f.$ que le corps parcoureroit en son entier. Mais à peine ce point est-il formé, que les deux forces le poussant toujours, sans aucune interruption, lui font décrire le quatrième point $g.$ de la circonférence, lequel est aussi le premier point de la diagonale $g. f.$ que le corps $a.$ parcoureroit en son entier,

si les deux mêmes forces ne l'obligeoient de changer à chaque instant de direction. Ainsi se forment tous les autres points de la circonférence du cercle. Il est donc évident que tous les points élémentaires et constitutifs de la figure circulaire sont nécessairement les premiers points d'autant de lignes diagonales dont la direction a changé à chaque moment, par l'impulsion simultanée et constante des deux forces que nous avons supposé agir sur le corps *a*. Or, tous ces points sont également inclinés les uns à l'égard des autres, et se trouvent perpendiculaires à chaque point du diamètre auquel ils correspondent. (Observez qu'il faut nécessairement se représenter à l'esprit la petite ligne diagonale *a. c.*, comme étant infiniment petite, et formée dans un instant infiniment petit; c'est-à-dire, comme un seul point de la circonférence du cercle *m.* fig. 2^e.; et qu'il en est ainsi de toutes les autres petites diagonales qui suivent *cd*, *de*, *eg*. On conçoit bien qu'il est impossible de représenter aux yeux la véritable formation de chacun de ces points comme infiniment petits.) Cela posé, je dis : le point *c.* de la circonférence est le premier point de la diagonale *c. f.*; le point *d.* de la même circonférence est le premier point de la diagonale *d. f.*; le point *e.* est le premier point de la diagonale *e. f.*; et ainsi de tous les autres qui forment le cercle dans

sa totalité. Or, tous ces points constitutifs de la circonférence ont chacun une inclinaison égale, et laquelle est géométriquement celle d'un premier point, qui commence toutes les lignes diagonales. Donc la circonférence entière du cercle doit être considérée en elle-même et dans sa propre nature, comme une véritable diagonale. Mais ces points de la circonférence sont tous correspondans à des points opposés du diamètre. Tels sont ceux d'une diagonale à l'égard de ceux qui forment son côté. Donc chaque point correspondant du diamètre doit être à l'égard du point de la circonférence qui lui est perpendiculaire, comme chaque point du côté d'un quarré est au point correspondant de sa diagonale, ou comme le côté entier du quarré est à la ligne entière de la diagonale. Or, il est démontré que cette dernière ligne est incommensurable avec son côté. Donc la circonférence du cercle *m.* est incommensurable avec son diamètre. Donc le rapport géométrique de la circonférence à son diamètre ne peut être exprimé en nombres. Donc il est incommensurable.

Cette preuve devient encore plus rigoureuse et demeure inébranlable par la démonstration d'un des théorèmes suivans, qui fait voir évidemment que toute diagonale d'un quarré quelconque est la demi-circonférence d'un cercle.

2°. Chercher le rapport géométrique de la circonférence au diamètre, c'est chercher combien de fois la ligne *a. m. a.* peut être contenue dans la circonférence du cercle *m.* C'est chercher une mesure ou aliquote commune qui puisse exprimer en nombres leurs grandeurs réciproques. Mais la circonférence et le diamètre sont composés d'une multitude de points qui se divisent eux-mêmes à l'infini. Or, il n'y a pas de nombres qui puissent exprimer le rapport infini de deux grandeurs. Donc le diamètre et la circonférence sont incommensurables en nombre. Afin de bien comprendre ce raisonnement, il faut se rappeler que tous les points constitutifs du cercle, étant parfaitement égaux entre eux, comprennent chacun un même nombre; en sorte que dans les diverses parties de la circonférence de tous les cercles grands ou petits, le rapport se trouve toujours être le même: c'est pourquoi la raison géométrique de la moitié, du tiers, du quart, et de telle autre partie de la circonférence que l'on voudra au diamètre d'un cercle, ne se trouve aucunement distingué du rapport géométrique de la circonférence entière à ce même diamètre. Il est le même que le rapport d'un seul point, tel que *c. d.*, ou *de.*, *eg.*, etc., de cette circonférence à tout le diamètre en son entier. Or, ce point est par lui-même incommensurable, puisqu'il est

supposé infiniment petit. Donc le rapport de la circonférence au diamètre est incommensurable. Donc il est impossible d'exprimer en nombres entiers leur rapport.

COROLLAIRE PREMIER.

Il suit de cette démonstration, que la ligne qui exprime le rapport géométrique de la circonférence au diamètre est incommensurable, tant en elle-même qu'en puissance, ou en son quarré; c'est-à-dire, que sa valeur ne peut être exprimée par un nombre entier et complet. 1°. Soit a la circonférence du cercle; soit b son diamètre; soit x la moyenne proportionnelle. Or, je dis que la ligne x est incommensurable en elle-même avec a et b , parce que sa grandeur ne peut être exprimée en nombres. On a donc cette proportion continue, $a : x :: x : b$. Or, la raison de a à b est doublée de celles de a à x , et de x à b . Mais on a prouvé par le théorème précédent, que la circonférence a n'étoit pas à son diamètre b comme de nombre à nombre; c'est-à-dire, que l'une et l'autre étoient incommensurables. Donc leur rapport est sourd. Donc la raison simple de a à x et de x à b est pareillement sourde. Donc la ligne qui exprime leur rapport est incommensurable en elle-même.

2°. Je dis que x , moyenne proportionnelle entre

la circonférence a et le diamètre b , est aussi incommensurable en puissance avec a . et b . ; car le quarré de a . est au quarré de x , comme a . est à b . ; puisqu'il est prouvé que le quarré du premier terme d'une proportion continue est au quarré du second, comme le premier terme est au troisième ; c'est-à-dire, $a^2 : x^2 :: a : b$. Or, la raison de a à b n'est pas de nombre à nombre. Donc a^2 , quarré de la circonférence, et x^2 , quarré de la moyenne proportionnelle, ne sont pas aussi de nombre à nombre. Donc la moyenne proportionnelle entre la circonférence et le diamètre est incommensurable, soit en elle-même, soit en puissance, ou dans son quarré.

COROLLAIRE DEUXIÈME.

Il suit de ce premier corollaire, que non-seulement toutes les circonférences des cercles sont incommensurables avec leurs diamètres et leurs rayons ; mais encore que toutes les lignes qui en dérivent, qui en sont des segmens ou des fractions, et qui sont comparées avec le cercle, se trouvent également incommensurables en nombres, tant en elle-mêmes qu'en leur puissance ; c'est-à-dire, en leurs quarrés, leurs cubes avec le cercle, etc. C'est pourquoi le quarré de la diagonale et celui de son côté, considérés dans ce sens rigoureux, ne sont pas commensurables ; je veux dire, que la

grandeur de l'aire que ces figures contiennent réciproquement ne peut être exprimée par aucun nombre entier. Il est bien vrai que la raison géométrique qui existe entre ces deux quarrés, est comme 2 à 1. Mais cette raison n'empêche pas que le nombre qui exprime la grandeur de chacun de ces deux quarrés ne se divise à l'infini, en laissant toujours un reste que tous nos calculs ne pourront jamais atteindre. Nous pouvons bien donner à la circonférence d'un cercle, ou bien à un quarré, le nombre 8, 10, 15, etc., relativement à une mesure générale que nous avons établie : mais ce n'est point là la valeur absolue et intrinsèque de la ligne circulaire. Il y a toujours nécessairement avec le nombre entier, c'est-à-dire, avec chaque unité, des fractions en plus ou en moins qui l'accompagnent et qui se divisent à l'infini. Ne soyons donc pas étonnés d'apprendre que dans toute la nature nous ne trouverons pas un seul cercle qui comprenne ni dans son périmètre, ni dans aucune de ses parties, un nombre qui soit entier et complet. Ne soyons pas surpris de voir que le cercle de la révolution annuelle de notre globe contienne le nombre de 365 jours, 5 heures, 48 minutes, 43 secondes, etc. ; que le cercle de la révolution périodique de la *lune*, comprenne le nombre de 27 jours, 7 heures, 43 minutes, 11 secondes, etc. ; que *Mercur*e parcoure son orbite

dans l'espace de 87 jours, 23 heures, 15 minutes, 37 secondes, etc. ; et *Mars* dans l'espace de un an, 321 jours, 23 heures, 30 minutes, 43 secondes, etc., et qu'il en soit ainsi de tous les autres cercles que décrivent les astres dont le mouvement périodique a pu être connu par les hommes. Peut-être le grand cercle de l'univers, le *grand Tour*, est-il le seul qui renferme dans l'immensité de sa circonférence un nombre entier, complet, exempt de toutes fractions ; ou, pour mieux dire, est-il l'unité simple ; et tous les autres cercles qui existent dans la nature, n'en sont-ils que des fractions composées ? Ce sont autant de sections de la sphère immense qui contient *tout* (1).

(1) L'existence du mouvement en ligne circulaire me suffit pour convaincre l'homme le plus opiniâtre dans ses sentimens, de l'existence d'un Dieu. Car nous concevons que tout corps ne peut recevoir de mouvement par lui-même. Il faut donc un premier moteur. Mais, en supposant avec le matérialiste, que *le mouvement est éternel, et qu'il n'est qu'un effet continuel de la nature*, je lui représente que le mouvement naturel de tout corps abandonné à lui-même, se fait nécessairement en ligne droite. Le corps qui se meut, ne peut décrire une courbe ou circulaire, sans se détourner de cette direction en ligne droite. Il faut donc une force étrangère qui l'éloigne du point où il tend naturellement, en cherchant à prendre toujours la route la plus courte. D'ailleurs, si l'on adopte le système des matérialistes, il seroit impossible de concevoir

Concluons que la proportion géométrique ne peut jamais donner aux savans la grandeur

un corps, seul existant dans l'univers, qui décrirait une ligne circulaire : jamais il n'eût pu parvenir à tracer la moindre courbe. Mais, dit-on, c'est l'effet de la nature. Expliquez-moi, je vous prie, ce que vous entendez par le mot *Nature* ? Est-ce le concours fortuit des diverses parties de la matière mises dans un mouvement continu, en sorte que ce monde ne serait que le résultat de leurs combinaisons variées à l'infini ? La construction du globe que nous habitons ne serait donc qu'un effet du hasard ? Et si le hasard l'a construit, le hasard peut le détruire : absurdité. J'entends, me direz-vous, par le mot de *Nature*, cet ordre admirable, cette harmonie constante qui règnent dans toutes les parties de l'univers. Mais, en me répondant de cette manière, vous tournez toujours dans le même cercle, sans satisfaire à la question. Je vous demande encore une fois qui est l'auteur de cet ordre qui existe dans la succession non interrompue des saisons, des jours et des nuits, dans le mouvement périodique des mers, etc. ? *C'est la Nature, c'est la Nature*, répliquez-vous, qui produit tous ces effets merveilleux. La Nature est donc *éternelle* ; la Nature est donc *toute-puissante* ? Elle a donc une certaine force qui nous est inconnue et qui est répandue dans l'univers entier, qui ne cesse d'agir et d'opérer à nos yeux les grandes merveilles dont nous sommes témoins chaque jour ? Ah ! si c'est là ce que vous appelez la *Nature* ; moi, je l'appelle *Dieu* : peu importe le nom. Appelez-le *Nature*, j'y consens. Les Grecs le nomment *Theos*, les Latins *Deus*, les Italiens *Dio*, et les Français *Dieu*. Ainsi, nous ne différons plus que par le mot,

absolue d'aucunes lignes comparées avec la circonférence du cercle ou son quarré, mais seulement des grandeurs relatives, et qu'il est impossible à l'homme de trouver le rapport en nombres entiers du diamètre avec la circonférence.

REMARQUE PREMIÈRE.

Les savans, surpris de voir qu'on ne pouvoit parvenir à la connoissance du nombre entier que comprend la ligne circulaire, en ont cherché la cause : ils l'ont attribué à l'imperfection des signes dont nous nous servons pour exprimer les grandeurs que nous mesurons (1). Il est bien certain

Nous sommes d'accord sur le sens qu'il signifie ; nous reconnoissons une force puissante dans la nature qui produit tout et qui fait tout mouvoir ; et nous dirons volontiers avec vous : *Vis quædam inest in naturâ potens*, etc.

*O qui perpetuâ mundum ratione gubernas,
Terrarum Cœlique sator, qui tempus ab ævo
Ire jubes, stabilisque manens das cuncta moveri.*

Boetius Metro. 9. Lib. III.

(1) Les hommes, liés entre eux par une multitude de rapports qui existent dans la société civile, ont été nécessairement obligés d'avoir des signes pour exprimer non-seulement l'espèce de chaque chose qui servoit à leurs besoins, mais encore la quantité de toutes les choses qu'ils employoient dans le commerce de la vie. Il falloit que cette expression fut courte et facile pour tout le monde.

que

que l'arithmétique a des expressions claires et nettes pour tous les nombres que nous appelons rationnels, et qu'elle en manque pour les irrationnels, qui sont beaucoup plus multipliés que les autres.

Nous pouvons dire avec assurance que celle dont nous nous servons est la moins imparfaite, et qu'elle est beaucoup supérieure à la méthode qu'employoient les Hébreux, les Grecs et les Romains. Ces signes numériques nous viennent des Arabes, et ceux-ci les avoient reçus des Indiens. La progression des nombres de dix en dix, a été donnée aux hommes par la nature elle-même. Dès notre enfance, nous commençons à compter de nous-mêmes sur nos doigts; et c'est leur nombre qui a donné aux premiers humains l'idée de renouveler leurs signes numériques de dixaine en dixaine. Ainsi, la progression décuple de nos nombres provient du nombre de nos doigts. Ainsi, cette mesure commune, *le pied*, que nous employons tous les jours dans le commerce de la vie, provient de ce que nos pieds forment la mesure la plus naturelle pour déterminer des distances sur la terre; *le pouce* (mesure qui est la douzième partie *du pied*), représente la largeur du pouce, partie du pied du corps humain; *la brasse*, dans son origine, est une mesure analogue à l'étendue de nos bras; *la coudée*, etc. Je demande, sans vouloir ici m'ériger en censeur, si les peuples ne devroient pas conserver, de préférence à des mots trop scientifiques pour leurs usages journaliers, cette expression simple et facile de mesures et de nombres, qui est aussi ancienne que les hommes, et que l'auteur de la nature semble nous avoir enseignée lui-même.

34 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

Car ces nombres, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, etc., sont tous des nombres irrationnels; c'est-à-dire, qu'ils n'ont point de racines quarrées qui puissent être exprimées par des nombres entiers. 4, par exemple, est un nombre rationnel, parce que sa racine peut être exprimée par un nombre entier, qui est 2, lequel, multiplié par lui-même, donne pour son produit 4. Mais la racine quarrée de 2 est un nombre irrationnel; c'est un nombre entre 2 et 1; mais entre 2 et 1 il y a une infinité de nombres qui comprennent des $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, etc. Toutes ces fractions ne peuvent être exprimées que par les mêmes signes qui représentent les nombres entiers. Nécessairement il en résulte des divisions qui se succèdent sans en trouver la fin. Mais cette imperfection, qui accompagne presque toujours les ouvrages de l'homme, n'est point ici la vraie cause qui nous empêche de parvenir à la fin des nombres que comprennent la circonférence du cercle ou la diagonale d'un quarré, etc. Il est dans la nature, il est dans l'essence même de cette ligne si simple et si merveilleuse qui forme la circonférence du cercle, d'avoir ses différentes parties divisibles à l'infini, sans que l'homme puisse jamais se flatter de parvenir au point constitutif de la ligne circulaire, lequel point demeure indivisible par lui-même. Il ne faut donc attribuer ce défaut, qui doit humilier l'orgueil de l'homme, qu'à la foiblesse de

son esprit, incapable par lui-même de saisir et de connoître toute la perfection des ouvrages de Dieu ; c'est pourquoy nous établirons en corollaire cette vérité incontestable.

COROLLAIRE FONDAMENTAL.

Il suit de la démonstration du théorème précédent, que toute circonférence d'un cercle est incommensurable pour nous, ainsi que ses parties, et que toutes lignes, quelles qu'elles soient, comparées avec la circonférence d'un cercle ou avec quelque une de ses parties, sont incommensurables avec elles ; c'est-à-dire qu'on ne pourra jamais exprimer leur rapport par un nombre entier et complet.

REMARQUE DEUXIÈME.

Quoique nous ne puissions point parvenir à la dernière fraction du nombre que comprend la circonférence du cercle ou de la diagonale d'un quarré, ou de telle autre ligne qui en dérive ; il ne s'ensuit pas que nous ne puissions avoir des lignes qui soient commensurables entre elles d'une manière géométrique. Je m'explique ; et je prends pour exemple cette proposition qui est évidente à tout le monde : le quarré de la diagonale comprend des nombres dont nous ne pouvons trouver la fin. Cependant son quarré est géométriquement commensurable avec celui de son côté,

puisqu'il en est le double. Mais la grandeur absolue de ces deux quarrés, exprimée en nombres; demeure incommensurable pour nous; parce que tous nos calculs ne peuvent en atteindre le dernier terme. Ainsi, quoique la circonférence et le diamètre du cercle comparés ensemble, comprennent une suite de nombres dont la fin nous reste inconnue, rien n'empêche que nous ne trouvions une ligne qui exprime leur rapport géométrique, et une ligne qui soit égale à la circonférence du cercle, ou à sa moitié, etc. Car, pour me servir encore du même exemple, lorsque le côté d'un quarré est donné, il est facile d'en trouver la diagonale. Il ne s'agit que de construire le quarré et de tirer d'un angle à un autre angle opposé une ligne droite. Elle sera la diagonale, quoique cette ligne soit incommensurable. Il faut appliquer le même raisonnement à l'égard de toutes les autres lignes.

L E M M E.

Le Cercle, par sa nature, peut se changer en toutes sortes de figures.

D É M O N S T R A T I O N.

Pour prouver cette vérité géométrique, laquelle est assez frappante d'elle-même, je pourrais n'employer ici d'autre espèce de démonstration que

celle de la *super-position*, qui consiste à placer mentalement et par la pensée, deux figures planes, l'une sur l'autre; de façon qu'elles se correspondent dans tous les points qui les constituent et qui les terminent, et de manière que l'égalité parfaite des deux figures soit démontrée évidemment à l'œil et à l'esprit. Cette démonstration se trouve fondée sur cet axiome connu, *nous devons affirmer ce que nous concevons évidemment.*

Je dis donc que le cercle peut se transformer en toutes sortes de figures. Ces figures sont formées ou de lignes courbes, ou de lignes droites, ou composées de toutes les deux ensemble. En prouvant son changement dans les deux premières sortes de figures, l'autre s'ensuivra nécessairement.

1°. Il est facile de comprendre que toute ligne circulaire peut se changer en ligne courbe, ou elliptique, ou parabolique, etc. La simple inspection de ces figures, comparées avec le cercle, suffit pour en démontrer l'évidence. On voit tout d'un coup que le cercle *a. b. c.*, fig. 3^e, en s'aplatissant aux points *a.* et *c.*, doit nécessairement s'allonger et former une *ellipse*, en sorte que les points *a* et *b* répondent aux points *A* et *B*, et le point *d* à *D*.

2°. On conçoit sans peine que toute ligne circu-

laire peut se réduire en une ligne droite; puisque la circonférence d'un cercle n'est qu'une ligne droite qu'on a trouvé le moyen de courber également autour d'un point qui en devient le centre. Soit *c. a. d.*, fig. 4, la demi-circonférence appuyée sur la ligne *CAD*; supposez que cette ligne circulaire s'abaisse au point *a.* uniformément, et que des deux bouts *c. d.* elle s'étende toujours vers les deux extrémités de la ligne droite *CD*. N'est-il pas évident que par ce moyen cette circulaire se rapprochera de plus en plus de la ligne droite, et qu'enfin elle ira se confondre entièrement avec elle? Ainsi, nous concevons que ces deux lignes ne formeront plus qu'une même ligne. Donc nous pouvons affirmer que toute ligne circulaire peut se changer en une ligne droite.

Si l'on conçoit bien ce premier changement de la ligne circulaire, il est facile d'en faire l'application au triangle équilatéral *abc*, fig. 5, et au cercle *efd*, même figure; car je dis que sa circonférence étant coupée en trois portions égales aux points *efd*, ces trois arcs égaux, en se réduisant en ligne droite, formeront chacun un des côtés du triangle équilatéral; en sorte que l'arc *ef* = la ligne *a*, l'arc *fd* = *b*, et l'arc *de* = *c*. La simple inspection des deux figures et la superposition de leurs parties respectives, font concevoir aisément le changement de la ligne circulaire en un

triangle *équilatéral*. Mais si les trois portions de la circonférence étoient inégales, alors le triangle auroit ses trois côtés inégaux, et deviendrait un *scaléna*. Il en est de même du quarré *a b c d* fig. 6^e, à l'égard du cercle *e f g h*. En comparant ensemble ces deux figures, on conçoit d'une manière évidente que la circonférence de ce cercle étant divisée en quatre parties égales aux points *e f g h*, et ces quatre portions d'arcs égaux étant réduites chacune en une ligne droite, il en résultera quatre lignes qui formeront nécessairement un quarré tel que *a. b. c. d.*, dont les quatre côtés égaux leur seront semblables; en sorte que l'arc *ef* = la ligne *a*, l'arc *fg* = *b*, l'arc *gh* = *c*, l'arc *he* = *d*. Si l'on suppose que dans les quatre portions de la circonférence il n'y en a que deux qui soient égales; alors, étant réduites en lignes droites, elles formeront un rectangle. Il en est ainsi de toutes les autres figures qu'on peut s'imaginer.

3^e. Soit le cercle *a b c d e f*, fig. 7^e.; soit *g h i l m n* une figure composée de lignes courbes et de lignes droites. Je dis qu'il est aisé de concevoir le changement du cercle en cette figure mixte. En effet, l'arc *a b* et l'arc *c d* de la circonférence du cercle sont égaux aux deux arcs *g* et *h* de la figure mixte, puisque c'est le même rayon qui les a formés. Quant à la portion de l'arc *e* et de l'arc *f* qui reste de la circonfé-

rence, il est évident que ces deux courbes, en s'abaissant aux points *e* et *f*, tandis que leurs extrémités s'allongeront vers les points *i l* et *m n*, elles iront se confondre avec les lignes droites de la figure mixte *i l* et *m n*, et ne formeront chacune qu'une seule et même ligne avec elle. Donc nous concevons que le cercle peut se changer en cette figure, etc. Donc, etc.

AUTRE DÉMONSTRATION PLUS RIGOUREUSE.

L'évidence de la démonstration de ce théorème est prouvée par le fait même. Car il est démontré ci-après, que toute diagonale d'un quarré est la demi-circonférence d'un cercle. Il est donc incontestable que la ligne circulaire peut se réduire en une ligne droite qui lui est entièrement égale. Or, cette ligne peut se diviser comme les autres en telles parties que l'on voudra, pour en former différentes figures; donc la circonférence entière du cercle peut se changer en toutes sortes de figures. Cette conclusion suit nécessairement du raisonnement que nous allons faire. En effet, c'est par le moyen du cercle que le géomètre vient à bout de comparer et de connoître tous les rapports des diverses figures qu'il veut mesurer jusque dans ses plus petites parties. Or, le cercle ne peut donner exactement les rapports et les proportions d'un *tout* avec

ses parties , sans être lui-même capable de se transformer en cette figure , et d'en prendre toutes les modifications ; car , s'il n'avoit pas en lui-même tous ces rapports , il ne pourroit pas nous les donner ; et il nous seroit impossible de les appliquer aux différentes grandeurs que nous voudrions mesurer. (On peut faire une application géométrique de ce raisonnement sur la figure mixte 7^e. , et encore plus facilement sur les autres ; car il est évident que la circonférence du cercle *efgh* , fig. 6 , ne peut donner les rapports des quatre lignes du quarré *abcd* que l'on compare avec ce cercle , sans que l'arc *ef* soit proportionnel à la ligne *a* , et l'arc *fg* à la ligne *b* , et l'arc *gh* à la ligne *c* , etc. ; si le quarré étoit inscrit dans le cercle , alors les arcs se trouveroient plus grands que les côtés du quarré , puisque ceux-ci seroient les cordes qui les soutiendroient. Mais ces mêmes arcs resteroient toujours entre eux comme ces lignes , c'est-à-dire , qu'ils seroient égaux , et qu'étant réduits en lignes droites , ils formeroient aussi un quarré). C'est par cette uniformité et cette égalité parfaites qui règnent dans tous les points de la circonférence , que le cercle devient susceptible de tous les rapports possibles , et capable de se plier à toutes les formes que l'on puisse s'imaginer.

Or , puisque tous les points du cercle qui forment sa circonférence n'ont rien qui les distingue

plus particulièrement les uns des autres, il s'ensuit nécessairement que le cercle n'a par lui-même rien qui le porte à adopter plutôt telle figure que telle autre. Donc, il peut indifféremment se changer en toutes sortes de figures. *Il n'y a point de milieu : ou le cercle peut se changer en toutes sortes de figures, ou il ne peut se changer en aucune.* Si l'on admet cette dernière proposition, il faudroit supposer que la ligne circulaire ne pût point se réduire en une ligne droite; ce qui est absurde. Il est démontré par l'un des théorèmes suivans que toute diagonale d'un quarré exprime géométriquement la grandeur de la demi-circonférence d'un cercle égal à un quarré inscrit. Il est évident que cette ligne peut se diviser en mille et mille parties différentes, dont on composera facilement diverses figures. D'ailleurs, pour dissiper toutes difficultés à ce sujet, il est démontré ci-après que tout cercle se change en un quarré, et qu'ils n'ont tous deux qu'une même surface. Donc le cercle peut se transformer en toutes sortes de figures; donc toutes celles qui existent dans la nature, telles qu'elles puissent être imaginées, sont autant de modifications différentes que prend le cercle, et qu'il varie à l'infini.

Remarque. Il est inutile d'avertir que je ne parle ici que de la forme extérieure des figures,

sans considérer leurs surfaces relativement à celle du cercle : c'est ce qui va faire l'objet de mes démonstrations suivantes. Car si le cercle peut prendre les rapports et les différentes modifications de toutes les figures qu'on lui compare, il peut conséquemment en prendre les surfaces.

CHAPITRE III.

Du Quarré , et de sa nature.

LE Quarré est une figure qui comprend un espace régulier terminé par quatre lignes égales et perpendiculaires les unes aux autres. Cette figure est, après le cercle, la plus simple et la plus uniforme. Notre esprit en saisit facilement toutes les proportions, qui se font par moitié, par quart, par huitième, etc. On réduit sans peine toutes les autres figures en un quarré ; et tout quarré est lié essentiellement avec le cercle, puisque tout quarré représente un cercle. Cette figure, composée de quatre lignes égales, est coupée en deux moitiés par une ligne qui, tirée d'un angle à l'autre angle opposé, s'appelle *diagonale*. La nature de cette ligne est la même que celle de son côté. Ces deux lignes n'ont qu'un seul et même mécanisme, et leur composition géomé-

44 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE.

trique n'est point distincte. Elles se trouvent également incommensurables l'une à l'autre. Le lien qui enchaîne le quarré avec le cercle est mutuel. Il est le plus étroit et le plus intime, en sorte qu'il y a *identité* entre ces deux figures. Je dis qu'il y a *identité*, si leurs élémens sont semblables, soit dans leurs surfaces, soit à l'égard de leur périmètre. Nous allons démontrer qu'il y a une véritable égalité de surface. Quant au périmètre, il est vrai que le quarré d'un cercle ne peut avoir en même temps son périmètre égal à la circonférence de ce même cercle; en sorte que ces deux figures, dont la surface est semblable, ne sont point *isopérimètres*. Mais nous prouverons que les parties élémentaires de la ligne qui forme le *quarré* d'un *cercle*, proviennent essentiellement de ce *même cercle*, et que les parties constitutives de la circonférence de ce cercle ne sont aucunement distinguées de celles qui composent la ligne de son quarré, et même que chaque ligne du côté du *quarré* d'un *cercle* donne d'une manière géométrique chaque *quart* de la surface de ce *cercle*. C'est pourquoi nous avons raison d'affirmer que le cercle et le quarré ont une *identité géométrique*, puisqu'il est démontré géométriquement que toutes les parties qui composent ces deux figures sont en elles-mêmes parfaitement semblables.

THÉORÈME PREMIER.

Le Cercle et le Quarré sont par leur nature enchaînés l'un à l'autre par un lien géométrique qui leur est commun.

DÉMONSTRATION.

1^o. Tout cercle ne peut exister sans supposer un diamètre; c'est-à-dire, sans une ligne droite qui passe par le centre, et va aboutir à deux points opposés de la circonférence. Car, il faut bien observer que c'est cette ligne qui détermine toute la valeur de la circonférence. Or cette ligne est en même temps, et le diamètre du cercle, et la diagonale du quarré inscrit dans ce cercle. En effet, si deux diamètres se coupent perpendiculairement l'un à l'autre, comme dans la fig. 8 $a b$ et $c d$, ils formeront nécessairement les deux diagonales d'un quarré, dont les quatre côtés seront désignés géométriquement par les quatre extrémités des deux diamètres $a c b d$. Il est donc de la nature du cercle d'inscrire dans sa circonférence un quarré avec lequel il demeure étroitement lié.

2^o. Ces deux figures se trouvent enchaînées l'une à l'autre dans le quarré par un lien géométrique qui leur est commun. En effet, tout

quarré ne peut exister géométriquement sans supposer une diagonale qui le partage également, et qui sert à déterminer la valeur réelle de ses côtés. Or cette ligne est commune au cercle et au quarré. Car toute diagonale d'un quarré est la demi-circonférence d'un cercle; en sorte que les deux diagonales réunies ensemble, forment une ligne droite qui est toujours égale à la circonférence entière d'un cercle. Donc ces deux figures sont essentiellement liées l'une à l'autre dans le quarré, et s'y trouvent confondues dans la même ligne.

3°. J'ajoute à cette preuve, que tout quarré représente un cercle qui lui est égal en surface, et conséquemment que tout cercle a son quarré. Donc ces deux figures sont enchainées l'une à l'autre par un lien étroit et mutuel.

THÉORÈME DEUXIÈME.

Tout quarré inscrit trouve dans le quarré du cercle où il est inscrit, la circonférence du cercle qui lui est égal en surface.

DÉMONSTRATION.

Soit le quarré $A c b d$, fig. 9, inscrit dans le cercle O . Soit $m n r s$, fig. 10, le quarré qui est égal au cercle O . La diagonale de ce dernier

quarré est $m p r$; il s'agit de prouver que cette diagonale est la demi-circonférence d'un cercle égal au quarré inscrit $A c b d$.

Cherchez d'abord le diamètre du cercle qui doit être égal au quarré inscrit, en suivant la méthode géométrique pour trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données. Vous aurez donc cette proportion ; le côté du quarré égal au cercle O est au côté du quarré inscrit, comme le diamètre du cercle O est au diamètre du cercle égal au quarré inscrit ; c'est-à-dire, fig. 11, $m n : b d :: b a : x$. La ligne x est donc le diamètre du cercle égal au quarré $A c b d$, et la diagonale $m p r$. en est la demi-circonférence. En effet, soit le diamètre du cercle $O = 10$. Conséquemment la diagonale du quarré inscrit $= 10$; et le côté de ce quarré $= 7,071,067,8... etc.$ Le côté $m n$ du quarré égal en surface au cercle $O = 8,862,269$, etc. ; de là cette proportion : $8,862,269... etc. :: 7,071,067,8... etc. :: 10 : 7,978,84... etc.$, donc $x = 7,978,84$, etc. ; mais si x est le vrai diamètre du cercle égal au quarré inscrit, et si $m p r$ en est réellement la demi-circonférence, cette diagonale $m p r$ doit être au côté du quarré inscrit, comme ce côté est à la moitié du diamètre, c'est-à-dire, au rayon. Car la demi-circonférence d'un cercle, multipliée par son rayon, donne un produit sem-

blable à celui du quarré égal à la surface du cercle. En effet, $\frac{x}{2} = 3,989,422$, etc. $m. p. r. = 12,533,141$, etc. Multipliez l'un par l'autre, et vous aurez au quotient 50, lequel sera égal à celui du côté du quarré $A.D \times A.D$; c'est-à-dire, $7,071,067,8$, etc. $\times 7,071,067,8$, etc. $= 50$. Donc ce quarré et le rectangle sont tous les deux égaux à la surface du cercle. De là, il suit que le rectangle formé de x et de $\frac{mpr}{2}$ est encore égal au cercle; car on aura cette autre proportion: le quarré de x est au rectangle fait du diamètre x et de la moitié de la diagonale mp , comme le diamètre du cercle est au quart de la circonférence, fig. 12, $x^2 : mp \times x :: x : mp$ ou $\frac{mpr}{2}$; ainsi $63,661,95$, etc. $: 50 :: 7,978,844$, etc. $: 6,266,570$, etc. Or, dans cette proportion, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens; et ce produit de part et d'autre $= 39,894,22$, etc. Donc mpr est la demi-circonférence, et mp le quart du cercle égal au quarré inscrit $A c b D$; donc les deux diagonales égalent la circonférence entière. Donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de la démonstration de ce théorème:
1°. Que tout cercle a son quarré et que tout quarré a son cercle qui lui est égal en surface.

2°.

2°. Que toute diagonale d'un quarré représente la demi-circonférence d'un cercle égal à un quarré inscrit. Car, si l'on suppose que le diamètre du cercle O , fig. 9, $= 7$, ce même nombre exprimera aussi la valeur de la diagonale du quarré inscrit $a c b d$, dont le côté $= 4,949,747$, etc. Dans cette hypothèse, $m n r s$, fig. 10, sera donc le quarré du cercle O . Or, je dis que sa diagonale p est la demi-circonférence du cercle égal au quarré inscrit $a c b d$. En effet, la circonférence du cercle $O = 21,991,148$, etc; sa surface $= 38,484,510$, etc.; la racine de ce dernier nombre exprimera le côté de son quarré $m n r s$; c'est à-dire, $= 6,203,588$, etc. Donc sa diagonale $p = 8,773,199$, etc. Or, ce même nombre exprime la grandeur de la demi-circonférence du cercle qui est égal au quarré inscrit $a c b d$, dont le côté $= 4,949,747$, etc., et dont la diagonale $= 7$. Il est donc évident que le cercle O inscrit dans sa circonférence un quarré dont les quatre côtés sont $a c b d$, et qu'il inscrit de même dans son propre quarré, la circonférence entière du cercle égal à ce quarré $a c b d$, rectifiée dans les deux diagonales $m r, n s$, lesquelles, en se coupant au point p , forment les quatre quarts de cette même circonférence. Donc ces deux figures se trouvent enchainées l'une à l'autre par un double

50 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

lien, qui est le plus étroit. On verra, dans la suite, la raison géométrique qui fait que toute diagonale d'un carré doit être nécessairement la demi-circonférence d'un cercle.

THÉORÈME TROISIÈME.

Tout cercle contient dans son diamètre la ligne qui forme le carré égal à sa surface ; c'est-à-dire, la moyenne proportionnelle entre le rayon de ce cercle et sa demi-circonférence ; et l'excédent du diamètre sur cette ligne est la mesure arithmétique qui coupe le diamètre et le rayon en moyenne et extrême raison.

DÉMONSTRATION.

Soit le cercle $abc d$, figure. 17, dont le diamètre $ac = 10$. Donc la circonférence de ce cercle $= 31,415,926$, etc. La moitié de ce nombre étant multipliée par le rayon $\frac{ac}{2}$ $= 5$, donnera pour produit la surface du cercle $= 78,539,81$, etc. Tirez la racine carrée de ce nombre, vous aurez $8,862,269$, etc., laquelle exprime la valeur de la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence du cercle. Car le carré de cette ligne donnera sa surface,

D'U CERCLE ET DU QUARRÉ 51
 qui égale 78,539,81, etc. Cela posé, soit le diamètre ac , coupé au point m , en sorte que mc représente la ligne dont la grandeur est exprimée par le nombre 8,862,269, etc. Donc $ac = mc + am$: donc am est l'excédent du diamètre sur la ligne mc . Or je dis que cet excédent am est la mesure arithmétique qui coupe le diamètre et le rayon en moyenne et extrême raison, et qui donne, par ce moyen, les quatre côtés du quarré égal au cercle $abcd$.

1^o. Retranchez du diamètre ac la petite ligne am , vous aurez la ligne mc ; et de mc , retranchez encore am , vous aurez cette autre ligne fc ; c'est-à-dire, si du nombre 10, qui égale ac , vous ôtez 8,862,269, etc., qui $= mc$, il vous restera 1,137,730, etc., excédent du diamètre $= am$; et si de 8,862,269, etc., vous ôtez encore 1,137,730, etc., vous aurez 7,724,538, etc. $= fc$. Or, il est évident que ces trois lignes ac , mc , fc , sont en proportion arithmétique, puisque c'est la même mesure am qui fait leur différence. L'on a donc cette proportion continue ; $ac : mc :: mc : fc$; ou bien $mc : ac :: fc : mc$. Or, dans ces deux proportions, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens. En effet, $10 + 7,724,538$, etc. $= 8,862,269$, etc. $+ 8,862,269$, etc. ; c'est-à-dire, 17,724,538, etc. Donc, etc.

(Observez que la ligne mc ; par l'hypothèse,

52 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

est la moyenne proportionnelle. Donc $fc + am = mc$; donc $fc + am$ forment aussi la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence du cercle $abcd$.)

2°. Je dis que le rayon est coupé pareillement en moyenne et extrême raison, par la moitié de la même mesure arithmétique am . Car le rayon $\frac{ac}{2} = 5$, et $\frac{am}{2} = .568,865$, etc. Otez du nombre entier 5, cette fraction, .568,865, il vous restera 4,431,134, etc.; et de ce dernier nombre, ôtez encore la même fraction, .568,865, etc., il vous restera 3,862,269, etc. Or, ces trois lignes sont en proportion arithmétique, et donnent le côté du carré égal à la surface du cercle $abcd$; car vous avez, $5 : 4,431,134$, etc. :: $4,431,134$, etc., : $3,862,269$, etc., *et vice versa*. Or, dans ces proportions, le produit des moyens est égal à celui des extrêmes; $4,431,134$, etc. + $4,431,134$, etc. = $5 + 3,862,269$, etc.; c'est-à-dire, que le produit de part et d'autre = $8,862,269$, etc., ce qui exprime la grandeur de la ligne mc , moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence du cercle $abcd$. Donc, etc.

Mais, si l'on suppose que le diamètre $ac = 8$, alors la circonférence du cercle $abcd = 25,132,74$, etc.; et la moitié de cette circonfé-

rence, multipliée par le rayon qui est 4, vous donnera la surface du cercle $\approx 50,265,48'$, etc.; en tirant la racine quarrée de ce dernier nombre, vous aurez 7,089,815,4, etc., qui sera la valeur de *mc* moyenne proportionnelle. Or, je dis que le diamètre 8 contient cette moyenne proportionnelle avec la mesure arithmétique qui coupe le diamètre en moyenne et extrême raison, ainsi que le rayon. D'après l'hypothèse $ac \approx 8$, et $mc \approx 7,089,815,4$, etc. L'excédent de 8 sur 7,089,815,4 etc. est cette fraction; 910,184,5, etc., qui $\approx am$; de la ligne *mc* ôtez encore *am*, vous aurez 6,179,630, etc. $\approx fc$. Or, ces trois lignes sont en proportion arithmétique continue, et le produit des moyens est égal à celui des extrêmes, car 7,089,815,4, etc. $\times$ 7,089,815,4, etc., ≈ 8 , $\times$ 6,179,630, etc., c'est-à-dire, 14,179,630, etc. Donc, etc. Il en est de même à l'égard du rayon ≈ 4 , qui se trouve aussi coupé en moyenne et extrême raison arithmétique par la moitié de l'excédent du diamètre *ac* sur la ligne *mc*; c'est-à-dire par le nombre fractionnaire .455,092,2 etc., qui exprime $\frac{am}{2}$. Donc tout diamètre d'un cercle contient en lui-même la ligne qui forme le quarré de ce cercle avec la mesure arithmétique qui coupe le diamètre et le rayon en moyenne et extrême raison.

COROLLAIRE PREMIER:

1°. Il suit de cette démonstration que la raison qui existe entre le diamètre d'un cercle et le quarré de ce cercle, est une raison arithmétique exprimée par l'excédent du diamètre sur la ligne qui forme ce quarré, et lequel excédent établit leur différence. Car cette mesure arithmétique est si essentielle que le diamètre de tous les cercles se trouve nécessairement composé de la ligne même de leurs propres quarrés, et de cette mesure qui coupe leurs diamètres, ainsi que leurs rayons, en cette moyenne proportionnelle, et conséquemment c'est cette même mesure qui sert à former la ligne du quarré de tous les cercles, comme on le verra encore mieux par la suite.

2°. Cette démonstration commence à nous découvrir quel est le véritable obstacle qui a empêché jusqu'à ce jour tous les savans de connoître le vrai rapport du diamètre à la circonférence du cercle? Ils ont tous cherché, par la proportion géométrique, ce rapport qui n'est qu'une raison composée arithmétique. Les théorèmes suivans nous révéleront entièrement ce mystère, dont l'obscurité ne cessoit d'arrêter les progrès de la géométrie.

Remarque importante.

Il faut bien observer que dans le cercle dont le diamètre $\equiv 1$, cette mesure arithmétique qui est l'excédent du diamètre sur la ligne du quarré du cercle, en coupant ce diamètre par une progression continue arithmétique, laisse à la fin un reste de nombre qui est moindre que cette mesure; c'est-à-dire, si le diamètre ac , même fig., $\equiv 10$: am mesure arithmétique $\equiv 1,137,730$ etc., alors vous aurez cette progression arithmétique $ac - am \equiv mc$. $mc - am \equiv fc$. $fc - am \equiv dc$. $dc - am \equiv go$. $go - am \equiv hc$. $hc - am \equiv ic$. $ic - am \equiv rc$, qui est le reste du diamètre coupé par une progression continue de la mesure arithmétique am . Ce reste du diamètre qui égale l'unité, est la fraction, $.89, 815, 4$, etc. $\equiv rc$. C'est ce reste qu'il est important de ne pas oublier.

THÉORÈME QUATRIÈME.

Tout quarré est le quarré d'un cercle dont le rayon lui-même sert toujours à composer le côté de ce quarré; en sorte que la moitié de la ligne qui forme chaque côté, est la moyenne proportionnelle arithmétique entre la partie de cette

56 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

ligne égale au rayon , et entre l'autre partie de cette même ligne coupée par le rayon.

DÉMONSTRATION.

Soit le cercle ab , fig. 8; soit cd , fig. 14, le carré de ce cercle. Or, je dis que si ce carré est réellement le carré du cercle a , la ligne cd , côté de ce carré, se trouve essentiellement composée du rayon ab , et que ce rayon coupe cd , de manière que la moitié de cette ligne est moyenne et extrême raison arithmétique entre le rayon et le reste de la ligne coupée par ce même rayon. Je vais démontrer en même tems, ce théorème, soit en nombres, soit en lignes, pour donner une plus grande évidence.

Supposez que le rayon $ab = 5$, prenez ce rayon sur le côté cd , qui sera conséquemment coupé au point b , en deux parties inégales cb , et bd , de façon que cd étant divisé en deux parties égales au point l , cette moitié devienne moyenne et extrême raison arithmétique entre le rayon cb et l'autre partie de la ligne bd . Car on a cette proportion continue, $cb : cl :: cl : bd$. ou bien, $cl : cb :: bd : cl$. Le produit des moyens est égal à celui des extrêmes $cb + bd = cl + cl$, c'est-à-dire, le rayon étant supposé $= 5$, la circonférence du cercle $cf = 31, 415, 926$ etc, et

DU CERCLE ET DU QUARRÉ 57

sa surface $\equiv 78,539,81$ etc La racine quarrée de ce dernier nombre $\equiv 8,862,269$, etc, qui est la valeur de cd . Or, si de $8,862,269$ etc. je prends 5 qui est le rayon, le reste $bd \equiv 3,862,269$ etc; et la moitié de $8,862,269$ etc., sera cl ou $ld \equiv 4,431,134$, etc. Ainsi on aura cette proportion continue, $5 : 4,431,134$, etc : $3,862,269$, etc, et *vice versa*. Il est évident que le produit des moyens est semblable à celui des extrêmes qui forme de part et d'autre le total 8,862,269, etc. et qui exprime la grandeur de cd . Donc la ligne qui forme le quarré $cdfg$ se trouve composée du rayon du cercle même dont il est le quarré. Donc, etc.

Supposez que le rayon $ab \equiv 3,500$, alors la circonférence du cercle $ab \equiv 21,991,148$, etc; et le côté cd du quarré de ce cercle $\equiv 6,203,588$; etc. Or je dis que ce côté du quarré est nécessairement composé du rayon 3,500, lequel coupe la ligne cd en deux parties inégales qui se trouvent en proportion arithmétique avec la moitié de la ligne cd , moyenne proportionnelle. En effet la moitié de 6,203,588 et c. est 3,101,794, etc. $\equiv \frac{cd}{2}$. Si de la ligne entière cd vous ôtez le rayon ab , c'est-à-dire, 6,203,588, etc. — 3,500, il vous restera 2,703,588, etc., lesquelles lignes se trouvent en proportion arithmétique avec $\frac{dc}{2}$;

58 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

car $3,500 : 3,101,794$, etc. $:: 3,101,794$, etc. $: 2,703,588$, etc. Or, le produit des moyens est égal à celui des extrêmes, $= 6,203,588$, etc. Donc tout côté d'un quarré quelconque est composé essentiellement du rayon du cercle dont il est le quarré.

COROLLAIRE PREMIER.

Il suit de la démonstration de ce théorème, qui est la conséquence du théorème précédent, que toute diagonale d'un quarré peut être aussi elle-même le côté d'un autre quarré, qui est double en surface de celui de son propre côté, et qui par conséquent représente un cercle, dont la surface est une fois plus grande. Donc la diagonale du quarré $c d f g$, même figure, se trouve aussi composée, comme son côté, du rayon du cercle dont elle forme le quarré; en sorte que la moitié de cette diagonale devient moyenne et extrême raison arithmétique, entre le rayon et l'autre segment de la diagonale. Car si le côté du quarré $c d f g$, $= 8,862,269$, etc. sa diagonale $= 12,533,141$, etc. Cette ligne, considérée comme étant le côté d'un quarré, se trouve nécessairement composée du rayon du cercle dont la surface $= cf^2$; or le rayon ca de ce cercle $= 7,071,067$, etc. lequel étant soustrait de $cf = 12,533,141$, etc. laisse un reste $af = 5,462,074$,

DU CERCLE ET DU QUARRÉ 59
 etc. Or, en prenant la moitié de la diagonale *cf*, vous aurez cette proportion arithmétique
 $7,071,067, \text{ etc.} : 6,266,570 :: 6,266,570, \text{ etc.} : 5,462,074, \text{ etc. et vice versa}$. Le produit des
 moyens est semblable à celui des extrêmes.
 Donc, etc.

COROLLAIRE DEUXIÈME.

Il suit, de ce premier corollaire, que toute diagonale d'un quarré peut être considérée de deux manières différentes à l'égard du cercle, ou comme étant la demi-circonférence d'un cercle égal à un quarré inscrit, ainsi que nous l'avons déjà prouvé, ou comme étant le côté d'un quarré double de celui de ses propres côtés. Dans ce dernier cas, c'est le rayon du cercle qui sert à composer la diagonale, et sous l'autre rapport, c'est ce même rayon qui devient le côté du quarré, égal au cercle, dont la diagonale est la demi-circonférence. Ainsi, tout rayon d'un *cercle* est le côté d'un quarré égal en surface, à un cercle, dont la demi-circonférence forme la diagonale du quarré du premier *cercle*.

THÉORÈME CINQUIÈME.

Tout côté d'un quarré divisé en deux parties égales, et en deux parties inégales dont l'une est

60 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

le rayon du cercle même qui est égal à ce carré ; comprend dans cette simple division de la ligne ; quatre fois le quart , quatre fois la moitié , quatre fois la totalité de la surface de ce cercle.

DÉMONSTRATION.

Soit le carré $abcd$, fig. 15; soit le cercle ab , fig. 8, dont la surface égale celle de ce carré. Je dis donc qu'on trouve dans la ligne qui forme chaque côté du carré $abcd$; 1°. quatre fois le quart ; 2°. quatre fois la moitié ; 3°. quatre fois la totalité du cercle ab . Pour parvenir à cette fin , prenez d'abord un des côtés de ce carré ; supposez ab , que vous diviserez en deux parties égales au point h , et en deux autres parties inégales au point f , de manière que le grand segment inégal $af = ab$, rayon du cercle , et le petit segment $= fb$. Soit le rayon du cercle $= 5$. Alors le côté du carré $ab = 8,862,269$; etc. $ab^{-2} = 78,539,81$ etc. ah , moitié de $ab = 4,431,134$, etc. Donc $af = 5$ et $fb = 3,862,269$, etc. lesquelles lignes forment une proportion arithmétique continue, ainsi que nous l'avons dit dans le théorème précédent. $af : ah :: ah : fb$; cela posé , il s'agit de prouver que la ligne ab , qui égale 8,862,269 , etc. , donne dans ses simples divisions

DU CERCLE ET DU QUARRÉ 61

que nous venons de faire, quatre fois le quart, quatre fois la moitié et quatre fois toute la surface du cercle ab , qui est égal au quarré $abcd$.

§. Ier.

1°. Sur la ligne ab , côté du quarré $abcd$, prenez d'abord la partie inégale af , ensuite l'une des parties égales ah , et l'autre partie inégale fb . Vous joindrez ensemble ces trois lignes perpendiculairement l'une à l'autre, en observant de mettre les deux segmens inégaux parallèles, dans la *fig. 16*; tirez ensuite une ligne du point f au point b , vous aurez un quadrilatère composé de quatre côtés différens, qu'on nomme *trapèze*; dont la surface est entièrement égale à celle du quart du cercle AB , ou à celle du quarré de la moitié de la ligne ab , côté de $abcd$.

Pour le démontrer, tirez du point i , la ligne ic , égale à la ligne bf , en sorte que la ligne $ai = fb$, et que la ligne $hc = af$; alors du milieu de if , vous abaisserez la perpendiculaire mn , qui partagera les deux triangles en deux parties égales. Par ce moyen vous aurez le quarré $amnh$, qui sera égal au trapèze $fahb$. En effet, les quatre petits triangles sont égaux. L'angle $i =$ l'angle c , parce qu'ils sont alternes

62 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

entre parallèles; la même raison prouve l'égalité des angles f et b . Les quatres côtés io , fo , co et bo , sont égaux entr'eux, puisque la perpendiculaire mn , les partage également par le point o . Donc, en donnant au quarré le petit triangle bno , et en otant au trapèze le petit triangle mfo , lequel est entièrement égal à l'autre, la surface reste la même. Donc les deux surfaces de ces deux figures ont une même égalité. Donc la surface de ce trapèze est égale à celle du quart du cercle AB . Donc, 1°. etc.

2°. Pour trouver la moitié de la surface du cercle AB , en suivant toujours la même division de la ligne ab , formez un quarré de la ligne af ; un autre quarré de la ligne ah , et un autre de la ligne fb ; et prenez ensuite les trois diagonales de ces quarrés, que vous joindrez perpendiculairement l'une à l'autre, en observant de mettre parallèles les deux diagonales des quarrés formés par les deux segmens inégaux. Alors vous aurez un quadrilatère, en tirant une ligne qui aboutisse aux extrémités des deux segmens inégaux. Or, il est facile de prouver géométriquement, par la même méthode que ci-dessus, que ce nouveau trapèze est égal à la moitié de la surface du quarré $abcd$, c'est-à-dire, au quarré de la moitié de sa diagonale qui $= 6,266,570$, etc; lequel nombre étant multiplié par lui-même, donne pour produit, $39,269,90$ etc.,

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 63

Or, ce total exprime la moitié de la surface du cercle AB ; Donc 2°. , etc.

3°. Vous trouverez facilement dans la même figure, la surface entière du cercle AB , en prenant deux fois la ligne af dont vous ne formerez qu'une seule et même ligne; deux fois la ligne ah , et deux fois la ligne fb . Vous en formerez trois lignes que vous unirez comme vous avez fait ci-dessus, en observant la même méthode. Vous aurez donc un troisième trapèze dont chaque côté sera double de ceux du premier trapèze, et dont la surface sera par conséquent quadruple. Donc la surface de ce trapèze vous donnera la surface entière du cercle AB . Donc 3°. , etc.

§. II.

Prenez la moitié de la ligne ab , c'est-à-dire ah , même figure, et ajoutez-la à la moitié de la ligne af , pour former, de ces deux lignes, un rectangle. Ajoutez encore ah à la moitié de fb pour en former un autre rectangle. Je dis que ces deux rectangles seront égaux à la surface du quart du quarré $abcd$ ou du quart du cercle AB . Pour le prouver, supposez que $ah = a$. Supposez que la moitié de $af = c$, et que la moitié de $fb = d$. Il est évident que

64 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

$a = c + d$, puisque les parties d'un tout égalent le tout. Donc en multipliant a par a , c'est multiplier a par $c +$ par d . Donc $\overline{a}^2 = ac + ad$; c'est-à-dire, que la moitié de la ligne ab , élevée à son carré $\overline{a}^2$, est égale aux rectangles faits de cette moitié ah ou hb , avec la moitié des segments inégaux Af et fb . $\overline{a}^2 = a \times c + a \times d$. Or, $\overline{a}^2$ égale le quart de la surface du carré $abcd$, puisque $4,431,131$, etc. $\times 443,113$, etc. $= 19,634,95$ etc., qui est le quart de $78,539,81$, etc. surface du cercle AB et du carré $abcd$. Donc, 1°. etc.

2°. Afin de trouver la moitié de la surface du cercle AB , en suivant la même figure, il ne s'agit que de prendre la ligne entière af , et la ligne entière fb , et les joindre avec ah , c'est-à-dire, la moitié de la ligne ab , pour en former deux rectangles. Or, je dis que les surfaces de ces deux rectangles égalent la moitié de la surface du cercle AB . Car vous avez dans le premier rectangle, $5 \times 4,431,134,6$, etc. $= 22,155,67$ etc. Dans le second rectangle, $3,862,269$, etc. $\times 4,431,134$, etc. $= 17,114,23$, etc. L'addition de ces deux produits vous donnera le total $39,269,90$ etc., qui est la moitié de $78,539,8$, etc. surface du cercle. Donc, 2°. etc.

3°. Il vous est aisé de trouver la surface entière

DU CERCLE ET DU QUARRÉ 65

tière du cercle, en suivant encore la même division. Prenez toute la ligne ab , côté du quarré $abcd$, et joignez-la séparément, comme ci-dessus, à chacune des deux segmens inégaux af et fb , pour en former deux rectangles. Or, ces deux rectangles seront égaux au quarré de la ligne entière ab , et par conséquent à toute la surface du cercle. Vous aurez d'une part $8,862,269$, ect. $\times 5 = 44,311,34$ ect., et de l'autre part $8,862,269$, etc. $\times 3,862,269$, etc. $= 34,228,47$ etc. Or, le total de ces deux produits $= 78,539,8$ etc, lequel exprime la surface entière du cercle AB . Donc 3°. , etc.

§. III.

1°. Prenez sur la ligne ab côté du quarré, même figure, la moitié des deux segmens inégaux af et fb . Je dis que le quarré de chacune de ces deux lignes et deux fois le rectangle fait de l'une de ces deux moitiés par l'autre, seront égaux au quarré de la moitié de la ligne ab , ou ah^2 , qui exprime le quart de la surface du cercle AB , c'est-à-dire, $ah^2 =$ la moitié de af^2 + deux fois la moitié de $af \times$ par la moitié de fb + la moitié de fb^2 . Supposez que la moitié de $af = f$, et la moitié de $fb = b$. Donc $ah = f + b$. Or, le quarré de $f + b$ est $f^2 + 2fb +$

E

66 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

b^{-2} . Mais la moitié $af^{-2} = ff$, et la moitié de $fb^{-2} = bb$, et $2af \times fb = 2fb$. Donc ah^{-2} , ou $hb^{-2} = ff + 2fb + bb$, ou, $f^{-2} + 2fb + b^{-2}$; donc il est évident que le quarré de la moitié de chacun des deux segmens inégaux et deux fois le rectangle fait de la moitié de l'un par l'autre, sont égaux au quarré de la moitié de la ligne ab , c'est-à-dire, au quart de la surface du cercle. En effet, vous avez par ces divisions le quarré de $\frac{af}{2} = 6,250$; d'autre part le quarré de $\frac{fb}{2} = 3,729,2$ etc. Ensuite vous avez deux fois le rectangle de $2,500 \times 1,931,13$ etc. = deux fois $4,827,835$, etc. Additionnez ces différens produits et leur total = $19,634,95$ etc. qui est le quart de la surface du cercle AB . Donc 1°. , etc.

2°. Pour trouver la moitié de la surface du même cercle, en conservant toujours les mêmes divisions de la ligne ab , il ne s'agit que de prendre les diagonales des quarrés de la moitié des deux segmens inégaux, et d'en former deux autres quarrés qui se trouveront par conséquent doubles du quarré de chacune des deux moitiés de af et de fb . En effet, la diagonale du quarré de $2,500 = 3,535,53$ etc. qui, multiplié par lui-même = $12,500$. La diagonale du quarré de $1,931,134$, etc. = $2,731,036$, etc. qui, multiplié par lui-même, donne pour produit, $7,458,5$.. etc.

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 67

Puis, ajoutez, comme ci-dessus, deux fois le produit du rectangle fait de l'une de ces diagonales par l'autre, c'est-à-dire, de 3,535,533, etc. $\times$ 2,731,036 etc. $=$ 9,655,67 etc. pris deux fois. Or, tous ces nombres additionnés forment un total $=$ 39,269,90 ect., lequel exprime la moitié de la surface du cercle AB . Donc 2°. , etc.

3°. Vous trouverez facilement la surface entière du cercle en suivant les mêmes divisions. Prenez la ligne entière af et pareillement celle de fb , faites de chacune de ces lignes deux quarrés, et multipliez ensuite l'un par l'autre en formant un rectangle dont vous prendrez deux fois le produit que vous joindrez aux deux autres. Alors vous aurez un total égal à la surface entière du cercle, dans la surface de ces trois figures. Donc 3°. , etc.

§. I V.

1°. Sur la ligne ab , côté du quarré $abcd$, même figure 15, prenez les deux segmens inégaux af et fb , dont vous ferez un rectangle. Prenez ensuite la partie du milieu hf , dont vous formerez un quarré en la multipliant par elle-même. Je dis que ce rectangle et ce quarré sont égaux en surface au quarré de ah , c'est-à-dire, au quart du cercle. Ainsi $ah^2 = af \times fb + hf^2$. En effet, $af = 5$, et $fb = 3,862,269$, etc, lesquels mul-

multipliés l'un par l'autre $\equiv 19,311,34$ etc.; $hf \equiv 568.865$, etc., dont le carré est cette fraction, $.323,607$, etc. Ces deux produits $19,311,34$ etc. $+ .323,607$; etc. $\equiv 19,634,95$, etc., qui est la surface du quart du cercle. Donc 1°. , etc.

2°. Si vous voulez trouver, en suivant cette même division de la ligne ab , la moitié de la surface du cercle, prenez la diagonale du carré de la ligne af , qui égale $7,071,067$, etc.; prenez la diagonale du carré de l'autre segment fb , qui $\equiv 5,462,07$ etc., formez de ces deux diagonales un rectangle, vous aurez, en les multipliant l'une par l'autre, au quotient, $3,862,269$, etc. auquel vous ajouterez le carré de la diagonale de hf , c'est-à-dire, la fraction $.804,497$, etc., qui, multipliée par elle-même, donne au quotient $.647,214$, etc.; ajoutez ce dernier produit au nombre $38,622,69$ etc., le total $\equiv 39,269,90$ etc., ce qui exprime la moitié de la surface du cercle AB . Donc 2°. , etc.

3°. Vous trouverez aussi facilement la surface entière de ce cercle, en prenant deux fois la ligne af , pour n'en former qu'une seule et même ligne; et deux fois la ligne fb , que vous réduirez pareillement en une seule ligne; alors de ces deux lignes doubles, vous en ferez un rectangle, dont le produit $\equiv 77,245,3$ etc.; prenez ensuite deux fois la ligne du milieu hf pour n'en faire qu'une seule ligne, $\equiv 1,137,730$, etc., laquelle étant multipliée par elle-même, donne le produit $\equiv$

DU CERCLE ET DU QUARRÉ 69
1,294,431, etc.; ajoutez ensemble les produits
du rectangle et de ce quarré, vous aurez le total
78,539,81 etc., qui est la surface entière du
cercle. Donc 30., etc.; donc, etc.

COROLLAIRE.

De la démonstration de ce beau théorème, qui nous paroît si simple, si naturel, et qui n'est fondé que sur la proportion arithmétique, il suit que, comme le quarré donne la surface entière du cercle dont il est le quarré, de même chaque côté du quarré donne le quart de la surface du cercle, en divisant simplement la ligne qui forme le quarré au point que la main du géomètre éternel a marqué elle-même.

CHAPITRE IV.

Rapport du cercle à son quarré, de la circonférence du cercle à son diamètre, du quarré du cercle à ses quarrés inscrit et circonscrit, de la diagonale à ses côtés.

Le rapport d'une grandeur ou d'une ligne avec une autre ne peut être connu que par la comparaison de ces deux grandeurs ou de ces deux lignes. Cette comparaison peut se faire de deux manières différentes, ou géométriquement, ou arithmétiquement. Par la première; on compare

ensemble deux grandeurs, en considérant comment l'une est contenue dans l'autre, ou combien de fois la plus grande contient la plus petite. Par la seconde, l'on compare deux grandeurs ou deux lignes, en considérant simplement leur différence, c'est-à-dire, en voyant combien l'une surpasse l'autre, ou combien elle en est surpassée. Il est facile de juger que ces deux rapports, ou ces deux manières de comparer des grandeurs, ne peuvent avoir un même *résultat*. La raison en est évidente. Dans la proportion arithmétique, on compare deux lignes, en examinant simplement l'excès dont l'une surpasse l'autre, sans considérer si cet excédent a quelque chose de commun avec les différentes parties de ces lignes. C'est cet excédent seul qui met plusieurs lignes en proportion; et c'est par la soustraction qu'on connoît leur égalité ou leur inégalité. Mais, dans la proportion géométrique, il faut prendre toutes les parties d'une ligne pour les multiplier par celles d'une autre avec laquelle on veut la comparer; et c'est par la division qu'on juge ensuite combien les parties de l'une se trouvent contenues dans l'autre. Cette proportion est celle que les géomètres emploient ordinairement. Il est facile de voir que cette manière de comparer les grandeurs, ne peut donner leur rapport entièrement exact, qu'en prenant toutes les parties,

même les plus petites, jusqu'à la dernière, qui composent chaque grandeur, autrement ce rapport demeurera toujours imparfait. Or, il est démontré, par le premier théorème fondamental, que tout diamètre d'un cercle et sa circonférence sont divisibles à l'infini, et par conséquent incommensurables; et que toutes les lignes qui en dérivent, et qui en sont des fractions, ne peuvent être exprimées en nombre. Donc la proportion géométrique ne peut donner aux hommes aucune grandeur exacte ni absolue, mais seulement des grandeurs relatives. Il n'est donc pas étonnant que tous les savans qui ont cherché le rapport du diamètre à la circonférence, n'aient jamais pu y parvenir, parce qu'ils employoient une méthode qui ne pouvoit pas les conduire sûrement à leur but. En vain l'on a comparé le cercle à un polygone composé d'un nombre infini de côtés, quoique le cercle répugne, par sa nature, à toute idée de lignes, même infiniment petites (car la ligne, quelque infiniment petite qu'on la suppose, doit être composée au moins de deux points infiniment petits; et chaque point constitutif du cercle est un point simple et indivisible (1)). En vain l'on a pris le polygone le

(1) Voilà, sans doute, la raison qui a engagé le fameux Pascal à dire, *qu'il n'étoit pas impossible que Dieu fût*

plus grand que l'on a pu, pour comparer son circuit avec le diamètre du cercle où il étoit inscrit, en examinant quelle étoit leur raison géométrique. Jean *Pell* en a considéré un qui avoit deux cent cinquante-six côtés. Mais quand on prendroit un polygone dont les côtés seroient multi-

infini et sans parties, puisqu'un point mathématique est infini et indivisible, et que cependant il existe en tout lieu et tout entier dans chaque endroit. Pascal dit une chose vraie à l'égard des points élémentaires qui constituent le cercle et qui en forment la circonférence. Ce point de la ligne circulaire est nécessairement indivisible par lui-même, tandis que la circonférence se divise à l'infini. En vain l'homme, si fier de sa foible science, prétendrait-il que nous ne pouvons concevoir un point quelconque, sans lui supposer une certaine étendue qui est divisible. Nous conviendrons avec lui de cette vérité à l'égard des corps; mais il faut aussi qu'il convienne avec nous d'une vérité géométrique qui est démontrée de la manière la plus évidente. La conclusion en est que l'infini existe certainement, et que la foiblesse de notre esprit ne nous permet pas de comprendre comment existe cet infini. C'est cette foiblesse de l'esprit humain qui nous a forcé de comparer le point constitutif du cercle au côté infiniment petit d'un polygone, parce qu'en effet il étoit impossible à l'homme de saisir ce point seul au milieu de l'infini, c'est-à-dire, au milieu de tous les autres points de la circonférence qui se divise à l'infini; et pour avoir un terme de comparaison, il a fallu se représenter à l'esprit le côté infiniment petit d'un polygone qui pût remplacer le point simple et constitutif de la ligne circulaire.

pliés dans un nombre encore plus considérable, on ne feroit que diviser de plus en plus le diamètre, sans jamais trouver un polygone égal à à un cercle, parce que le diamètre et le rayon sont divisibles à l'infini (1); et parce que la proportion géométrique donne sans cesse des raisons sourdes et des lignes incommensurables. Il nous est impossible d'atteindre la fin du nombre que comprend la ligne circulaire. Nous établirons, dans un lemme, d'une manière incontestable, cette vérité que nous avons déjà avancée, mais qu'on a bien de la peine à se représenter à l'esprit,

(1) Cela surpasse notre foible conception. Il y a mille autres choses qui existent dans la nature, et que nous ne pouvons pas comprendre. Je vous dirai bien plus. Il règne une proportion et un ordre admirable dans tous les nombres qui forment la grandeur de la circonférence du cercle. Ces nombres qui, au premier aspect, nous semblent être placés au hasard et confondus ensemble, sont rangés suivant des lois invariables pour tous les cercles qu'on peut s'imaginer. Prenons pour exemple le cercle dont le diamètre = 1, sa circonférence = 3,141,592,653, etc. Je vais vous démontrer qu'il y a dans tous ces nombres un ordre admirable qui est le plus simple, et qui existe jusques dans leurs racines quarrées. 3,141,592,653, etc. = 1,772,453,850,9 etc. $\times$ 1,772,453,850,9 etc.; et cette première racine 1,772,453,850,9 etc. = 1,331,335,363,803,3 etc. $\times$ 1,331,335,363,803,3 etc. Or, voici quelle est la proportion qui se trouve dans ce dernier nombre, et qui s'observe rigoureusement dans la circonférence de

74 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

et qui va servir à développer encore davantage le mécanisme du cercle.

LEMME.

Il est impossible de trouver un cercle qui, dans sa circonférence, ou dans une partie quelconque de sa circonférence, comprend un nombre entier et fini.

tous les cercles, et conséquemment dans la formation ou le mécanisme de tous les quarrés.

	2,400	1,200
	240,0	120,0
	20,000,000	10,000,000
	2,400	1,200
	240,0	120,0
2,662,670, etc.	24,00	12,00
× 2,662,670, etc.	4,000,000,0	2,000,000,0
= 7,089,815,4 etc.	2,400	1,200
Racine quarrée du	240,0	120,0
cercle dont le dia-	80,000,000	40,000,000
mètre = 16, et	2,400	1,200
dont la circonfé-	2,400	1,200
rence = 50,265,	2,400	1,200
482,45 etc.	400,000,00	200,000,00
	2,200	1,100
	2,200	1,100
	2,200	1,100
	100, etc.	50, etc.

Total.. 2,662,670,727,606,7 etc.

Total.... 1,331,335,363,803,3 etc.

D É M O N S T R A T I O N .

1°. L'évidence de cette proposition suit nécessairement du premier théorème fondamental, qui prouve que la circonférence de tous les cercles et leur diamètre sont incommensurables. Mais voici une autre démonstration qui achevera de nous convaincre.

2°. Pour comprendre encore plus facilement la vérité de cette proposition, il faut examiner comment se forme la circonférence du cercle. Elle se forme de toutes les parties du diamètre, qu'il faut d'abord prendre trois fois, et ensuite chaque unité des nombres entiers qui composent la circonférence, se trouve nécessairement accompagnée de fractions qui laissent toujours un reste à diviser. Ces fractions sont le tiers d'un $\frac{1}{10}$, le tiers d'un $\frac{1}{25}$, le tiers d'un $\frac{1}{1000}$, le tiers d'un $\frac{1}{2000}$, etc.; en sorte que toute unité des nombres provenans du diamètre pris trois fois, porte avec elle dans la circonférence du cercle cette fraction .47,197,551,196, etc. (nous n'en connoissons pas le dernier terme). Et comme la circonférence renferme trois fois le diamètre, il s'ensuit

76 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

que tout diamètre d'un cercle , multipliant trois fois cette fraction .47,197,5 etc. , donnera au quotient cette fraction autant de fois qu'il y aura d'unités dans la circonférence de ce même cercle. Un exemple rendra cela plus sensible. Si l'on suppose le diamètre $\equiv 7$. trois fois $7 \equiv 21$, qui expriment le nombre des unités de la circonférence. Multipliez la fraction .47,197,5 etc. , par 21 , vous aurez pour produit cette autre fraction , 991,148 , etc. , à laquelle vous ajouterez les nombres entiers $21 + 991,148$, etc. , ce qui exprime la circonférence entière du cercle dont le diamètre $\equiv 7$. Or , en multipliant toujours par la fraction .47,197,5 etc. les nombres entiers de la circonférence , pour tâcher de parvenir à la fin , on ne cessera de trouver d'autres fractions qui s'étendront à l'infini ; et tous les efforts du géomètre demeureront inutiles. Donc il est impossible à l'homme de trouver un nombre entier et complet qui exprime la grandeur exacte et absolue de la ligne circulaire, ou de quelque une de ses différentes parties.

THÉORÈME PREMIER.

Tout carré est le carré d'un cercle dont le côté forme la ligne moyenne proportionnelle entre la demi-circonférence de ce cercle et entre son rayon , et cette ligne se trouve composée , 1^o.

DU CERCLE ET DU QUARRÉ 77

du rayon entier de ce même cercle; 2°. de la moitié de ce rayon; 3°. du quart de ce rayon; 4°. de ce même quart multiplié par le nombre restant de la progression arithmétique faite sur le diamètre du cercle qui a pour diamètre l'unité.

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, il faut se rappeler la *remarque intéressante* que nous avons faite ci-dessus, qui nous fait comprendre que la mesure arithmétique, figure 17, en coupant le diamètre *ac* en moyenne et extrême raison, laisse un petit reste de nombres après toutes ses divisions continues opérées progressivement sur le diamètre entier, c'est-à-dire, que ce diamètre supposé 10, étant coupé arithmétiquement par la ligne *am* aux points *m, f, d, g, h, i, f*, laisse enfin un reste qui est *rc*, et $\equiv .898,154$, etc. Si l'on fait la progression arithmétique sur la moitié du diamètre avec la moitié de la mesure $\frac{am}{2}$, alors le reste sera la fraction

$.449,077$, etc., qui $\equiv \frac{rc}{2}$; par conséquent la même soustraction, faite par la progression arithmétique sur l'une et l'autre partie du diamètre, donnera un produit qui $\equiv .898,154$, etc. Mais ici, il faut supposer le diamètre $\equiv 1$, au lieu de 10; et par conséquent la fraction qui sera de reste $\equiv .89,815,4$ etc. cela posé.

DÉMONSTRATION.

1°. Soit le cercle a , fig. 8, dont le diamètre $ac = 8$, il s'agit de prouver que la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence de ce cercle, c'est-à-dire, le côté de son quarré est composé, 1°. du rayon entier de ce même cercle; 2°. de la moitié de ce rayon; 3°. de son quart; 4°. de ce même quart multiplié par le reste rc , de la soustraction faite progressivement par la mesure arithmétique am , sur le diamètre. En effet, prenez le rayon entier $= 4$, + sa moitié $= 2$, + son quart $= 1$, + ce même quart $1 \times .89,815,40$ etc. Or, en faisant l'addition de ces nombres, vous aurez la grandeur exacte de la ligne qui forme le quarré du cercle, car $4 + 2 + 1 + .089,815,40$ etc. $= 7,089,815,40$ etc. qui est la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence du cercle a . Car si le rayon $= 4$, la circonférence $= 25,132,74$ etc. et sa moitié $= 12,566,37$ etc., lequel nombre $\times 4 = 50,265,48$, etc. qui est la surface du cercle. La racine quarrée de ce dernier nombre sera donc la grandeur de la ligne moyenne proportionnelle, et qui $= 7,089,815,4$ etc., $\times 7,089,814,4$ etc., $= 50,265,48$ etc.. Donc, etc.

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 79

Supposez encore que le diamètre du cercle $a..$
 $= 7$, alors sa circonférence $= 21,991,148$, etc.
 Or, je dis que la ligne qui forme le quarré égal à
 ce cercle, se trouve composée du rayon entier de
 ce même cercle, de sa moitié, de son quart, et de
 ce quart multiplié par le reste rc , qui $=$
 $..89,815,40$ etc. En effet, d'après l'hypothèse, le
 rayon $= 3,500$. Sa moitié $= 1,750$, son quart
 $.875,00$, et ce quart $.875,00 \times ..89,815,4$ etc. $=$
 $..78,588,4$ etc., lesquels nombres additionnés en-
 semble, forment le total de $6,203,588$, etc. Or, ce
 nombre exprime la grandeur exacte de la moyenne
 proportionnelle entre le rayon et la demi-circonfé-
 rence du cercle dont le diamètre est supposé $= 7$.
 Donc tout côté du quarré d'un cercle est composé,
 1°. du rayon entier de ce cercle; 2°. de la moitié
 de ce rayon; 3°. de son quart; 4°. de ce quart mul-
 tiplié par le reste de la progression arithmétique
 faite sur le diamètre $= 1$. Donc, etc.

C O R O L L A I R E.

Il suit de la démonstration de ce théorème
 qu'il y a un rapport essentiel entre le rayon de
 tout cercle, et entre le quarré de tous les cercles,
 lequel rapport peut être exprimé de cette ma-

$$\text{nière} = ac + \frac{ac}{2} + \frac{ac}{4} + \frac{ac}{4} \times rc.$$

THÉORÈME DEUXIÈME.

La demi-circonférence de tout cercle est composée, 1°. de la ligne entière, qui est moyenne proportionnelle entre elle-même et son rayon; 2°. de la moitié de cette ligne moyenne proportionnelle; 3°. de son quart; 4°. de ce même quart multiplié par le nombre restant de la progression arithmétique faite sur le diamètre.

DÉMONSTRATION.

Nous avons vu par le théorème précédent, qu'en supposant le diamètre du cercle $= 8$, la moyenne proportionnelle entre son rayon et sa demi-circonférence, c'est-à-dire, que le côté du carré de ce cercle $= 7,089,815,4$ etc., et que sa demi-circonférence $= 12,586,37$ etc.; il s'agit donc de prouver que cette demi-circonférence est composée de la ligne entière qui forme le carré de ce cercle, de la moitié de cette ligne, de son quart, et de ce même quart multiplié par la fraction $..89,815,4$ etc. En effet, prenez $7,089,815,3$ etc. + sa moitié, $3,544,907,7$ etc. + son quart, $1,772,453,8$ etc., + ce même quart, $1,772,453,8$ etc., $\times ..89,815,4$ etc., dont le produit est cette fraction $..15,919,4$ etc., faites l'addition de tous ces

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. Si ces nombres , leur total $\equiv 12,566,37$ etc. Or, ce dernier nombre exprime la grandeur de la demi-circonférence du cercle. Donc , etc.

Soit encore le diamètre du même cercle $\equiv 7$, sa demi-circonférence $\equiv 10,995,574$, etc. Le quarré égal à la surface de ce cercle est le produit du rayon multiplié par la demi-circonférence, lequel $\equiv 38,484,50$ etc. De ce nombre tirez la racine quarrée, vous aurez la moyenne proportionnelle $\equiv 6,203,588$, etc. Je dis donc que cette moyenne proportionnelle, plus sa moitié, plus son quart, plus ce même quart multiplié etc., forme la grandeur de la demi-circonférence de ce cercle. En effet, prenez $6,203,588$, etc. $+ 3,101,794$, etc., $+ 1,550,897$, etc., $+ 1,550,897$, etc. $\times .89,815,4$ etc. qui $\equiv .139,294$, etc.; faites l'addition de tous ces nombres, vous trouverez au quotient le total $\equiv 10,995,57$ etc. Or ce nombre est la demi-circonférence du cercle dont le diamètre $\equiv 7$. Donc , etc.

THÉOREME TROISIÈME.

Toute circonférence d'un cercle est composée, 1°. du diamètre de ce même cercle, de la moitié de ce diamètre, du quart de ce diamètre, de ce même quart multiplié par le nombre restant de la progression arithmétique, faite sur le dia-

82 ALPHANTITÉ GÉOMÉTRIQUE

mètre $\equiv 1:20$. Du total, de ces différens nombres qu'il faut encore diviser de la même manière que ci-dessus, c'est-à-dire, de ce total divisé en son entier, en sa moitié, en son quart, etc.

DÉMONSTRATION.

Soit le diamètre du cercle $\equiv 8$, sa circonférence $\equiv 25,132,74$ etc. Or, je dis que cette circonférence se trouve composée du diamètre entier de ce même cercle, de sa moitié, de son quart, et de ce quart multiplié par $.89,815,4$ etc. En effet, prenez d'abord le diamètre $8 + 4$, $+ 2$, $+ 2 \times .89,815,4$ etc., qui égale la fraction $.179,630$, etc., faites l'addition de tous ces nombres, vous aurez le total $\equiv 14,179,630$, etc.; ensuite, faites la même opération sur ce total, c'est-à-dire, prenez d'abord $14,179,630$, etc.; plus sa moitié $\equiv 7,089,815,4$ etc., plus, son quart $\equiv 3,544,907$, etc., $+ \text{ce même quart}$ $3,544,907$, etc. $\times .89,815,4$ etc. $\equiv .318,387$, etc.; additionnez tous ces nombres, leur total $\equiv 25,132,74$ etc. Or, ce nombre exprime la circonférence entière du cercle. Donc, etc.

Si l'on suppose le rayon du cercle $\equiv 7$, alors sa circonférence $\equiv 12,991,148$, etc. Or, je dis que ce nombre est composé du diamètre entier de ce même cercle, de sa moitié, de son quart, et de ce quart multiplié comme

ci-dessus, etc. En effet, prenez le diamètre 7, + 3,500 + 1,750. + 1,750 x .89,815,4 etc. ; qui = 157,176,9 etc. ; faites l'addition de tous ces nombres, leur total = 12,407,176, etc. Faites la même opération sur ce total, c'est-à-dire ; prenez encore ce nombre entier, plus sa moitié, plus son quart, plus ce même quart ; etc. ; c'est-à-dire ; 12,407,176, etc. + 6,203,588, etc. + 3,101,794, etc. + 3,101,794, etc. x .89,815,4 etc. = 1278,589, etc. Le total de ces nombres vous donnera 21,991,148, etc. lequel exprime la valeur exacte de la circonférence du cercle dont le diamètre est 7. Donc, etc.

COROLLAIRE.

1°. Il suit de la démonstration de ces trois théorèmes, qui sont intimement liés ensemble, que tout cercle et son carré se trouvent entièrement composés, chacun dans leur périmètre, des mêmes parties, et que par conséquent les élémens qui constituent la ligne d'un carré, sont semblables à ceux qui composent la circonférence du cercle dont il est le carré. Nous découvrons donc aujourd'hui la raison géométrique qui fait que les périmètres ou les circonférences des cercles sont entr'elles nécessairement comme leurs diamètres, comme leurs moitiés ou comme

84 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

les rayons, comme leurs quarts etc., puisque nous venons de prouver que les uns et les autres sont composés de parties entièrement semblables.

2°. Il suit de cette démonstration que le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, n'est qu'une raison arithmétique, composée du diamètre lui-même, de sa moitié, de son quart et de ce quart multiplié par le nombre restant de la progression arithmétique faite sur le diamètre du cercle qui a l'unité pour diamètre. L'on voit que cette multiplication doit être considérée comme une véritable addition, puisque le restant du diamètre qui égale l'unité, est pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quart qui le multiplie. Voilà donc enfin quel est le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre et à son propre carré, que l'on a cherché depuis tant de siècles. Il étoit renfermé dans le diamètre lui-même qu'il falloit diviser simplement par sa moitié et par son quart, rapport admirable qui nous prouve d'une manière incontestable que le cercle et le carré sont composés des mêmes parties constitutives, et que ces deux figures n'ont réellement qu'une seule et même identité, laquelle consiste, 1°. dans l'identité des parties qui composent la ligne de la circonférence et la ligne du carré; 2°. dans l'égalité parfaite des parties

qui forment l'espace circulaire et l'espace rectiligne. Nous voyons donc à présent l'obstacle qui a empêché tous les savans de trouver ce rapport.

THÉORÈME QUATRIÈME.

Toute diagonale d'un quarré comparé d'une manière géométrique avec son côté, tout côté d'un quarré comparé géométriquement avec sa diagonale, sont incommensurables; et, comparées arithmétiquement, ces lignes sont commensurables entr'elles.

DÉMONSTRATION.

1^o. La première partie de ce théorème est prouvée clairement par les géomètres. Mais il faut observer que le côté d'un quarré est autant incommensurable avec sa diagonale, que celle-ci avec son côté. Car, si l'on suppose la diagonale $\equiv 9$, qui est un nombre quarré, et par conséquent commensurable en lui-même; alors son côté se trouvera incommensurable, puisqu'il $\equiv 6,363,961,0$ etc., qui n'est point un nombre quarré. Donc, etc.

2^o. Je dis que la diagonale d'un quarré étant comparée arithmétiquement avec son côté, ces deux lignes se trouvent commensurables entre

86 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

elles, puisqu'il ne s'agit, dans cette comparaison, que de prendre l'excès qui en fait connoître la différence, et puisqu'elles ont une mesure de l'unité qui leur est commune. Or, le nombre .707,106,78 etc., qui est le côté du quarré dont la diagonale $\equiv 1$, exprime le rapport mutuel de toute diagonale avec le côté de son quarré et de tout côté d'un quarré avec sa diagonale. En effet, soit le côté d'un quarré $\equiv 4,549,747$, etc. Ainsi sa diagonale $\equiv 7$. Or, $7 \times .707,106,78$ etc., $\equiv 4,949,747$, etc. : et $4,949,747$, etc., $\times .707,106,78$ etc. $\equiv 3,500$, qui exprime la moitié de la diagonale 7. Donc cette fraction .707,106,78 etc., est la mesure commune qui exprime le rapport mutuel de toutes les diagonales avec les côtés de leurs quarrés, ou de tous les côtés des quarrés avec leurs diagonales. Car il est évident que ce nombre, multiplié par le côté d'un quarré, donne la moitié de sa diagonale ; et, multiplié par la diagonale, donne son côté. Donc, etc.

D'ailleurs, il est facile de voir que la diagonale a un rapport arithmétique qui est frappant avec son côté ; car, comme tout côté d'un quarré se trouve composé de la moitié du diamètre du cercle dont il est le quarré + de son quart, + de sa huitième partie, etc., ainsi que nous l'avons démontré ci-dessus, de même la diagonale de tout quarré se trouve toujours composée, 1°. du

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 87

diamètre entier du cercle égal au quarré dont elle est diagonale; 2°. du quart de ce diamètre, etc., c'est-à-dire, en supposant le diamètre du cercle $= 1$; la diagonale de son quarré $1, + \frac{1}{4} + \frac{1}{32}, + \frac{1}{640}, + \frac{1}{3200}, + \frac{1}{64000}$, etc., rapport qui est incommensurable pour nous, mais qui existe réellement. Afin de faire bien comprendre ce que nous avançons ici, je suppose un quarré dont le côté $= 6,203,588$, etc., sa diagonale $= 8,773,199$, etc. Ce quarré est égal en surface au cercle dont le diamètre $= 7$. Or, je dis que, comme le côté du quarré est composé, 1°. de la moitié du diamètre; 2°. de son quart, etc., c'est-à-dire $= 3,500 + 1,750 + .87,500$, etc., de même la diagonale se trouve composée du diamètre entier de ce même cercle, de son quart, etc., c'est-à-dire $= 7. + 1,750. + .21,875. + .1,093,750 + \dots, 218,750. + \dots, .10,937$, etc., dont le total $= 8,773,199$, etc. Donc, etc.

Remarque. Il n'est pas étonnant que le côté du quarré se trouve incommensurable avec la diagonale, puisque nous avons prouvé que toute ligne comparée avec la circonférence du cercle ou avec quelqu'une de ses parties, telle qu'on puisse la supposer, est toujours incommensurable avec elle; et il n'y a point de contradiction

68 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE.

lorsque nous disons que deux lignes comparées arithmétiquement sont commensurables ; parce que , dans cette simple comparaison , leur commune mesure est l'unité répétée un certain nombre de fois , quoiqu'il soit impossible à l'homme de parvenir à la dernière unité. En effet , c'est l'extraction imparfaite des racines qui rend les lignes incommensurables. Car , il est démontré en géométrie que toute ligne qui n'a pas un nombre carré pour racine est incommensurable. Or , la proportion géométrique consiste à multiplier une grandeur par une autre , afin d'en avoir ensuite les racines , et de les comparer ensemble. Et comme ces grandeurs ou ces lignes ne peuvent être saisies par la proportion géométrique dans toutes leurs parties , il arrive nécessairement que l'extraction de leurs racines demeure toujours imparfaite , et conséquemment ces lignes sont *incommensurables*.

PROBLÈME PREMIER.

Trouver le rapport du carré d'un cercle au carré inscrit dans ce même cercle , et au carré qui lui est circonscrit.

SOLUTION.

Tout cercle , comme nous l'avons déjà dit ,

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 89

inscrit dans sa circonférence un quarré dont la diagonale est le diamètre même de ce cercle; et il peut avoir un autre quarré qui lui est circonscrit, et dont les côtés sont formés par le diamètre de ce même cercle. Soit le quarré $abcd$, figure 18, inscrit dans le cercle O , dont le diamètre $bod = 8$. Soit le quarré circonscrit $mnpq$, dont chaque côté nécessairement $= 8$.

Soit $s t u x$ le quarré égal au cercle O . Il s'agit donc de trouver le rapport de ce dernier quarré, aux deux autres; le côté de ce quarré circonscrit, étant supposé $= 8$, la surface de ce quarré $= 64$. Donc le quarré inscrit aura pour sa surface le nombre $= 32$, puisqu'il est démontré, en géométrie, que le quarré circonscrit est toujours le double du quarré inscrit. Or, je dis que le quarré égal au cercle O , tient d'abord le milieu entre les deux nombres qui forment la grandeur des deux autres quarrés, c'est-à-dire, $st^2 = 48$; en sorte qu'en peut avoir cette proportion arithmétique continue, $32 : 48 :: 48 : 64$. Mais ensuite observez que ce quarré égal au cercle, comprend toujours un nombre qui est un peu plus grand que la moitié du total des deux quarrés inscrit et circonscrit, et comme la circonférence de tout cercle se trouve composée de son propre diamètre, pris trois fois, avec un petit excédent de nombres, vous prendrez cet

90 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

excédent que vous multipliez par le quart de votre diamètre. Je vais m'expliquer clairement. Le diamètre du cercle $O = 8$, d'après l'hypothèse; donc sa circonférence $= 25,132,74$ etc. Je dis donc qu'il faut d'abord ôter de ce nombre trois fois le diamètre, c'est-à-dire, 24; reste donc 1,132,74 etc., qu'il faut multiplier par le quart du diamètre, qui est 2, c'est-à-dire, 1,132,74 etc. $\times 2 = 2,265,48$ etc., et je dis qu'il faut en dernier lieu ajouter ce produit au nombre qui forme la moitié du total des deux autres carrés, c'est-à-dire, $48 + 2,265,48$ etc. $= 50,265,48$ etc. Or, ce nombre exprime la grandeur de la surface du carré $stux$, égal au cercle O . Donc, etc.

Pour faire mieux comprendre ce rapport, servons-nous d'un autre exemple. Supposons le diamètre du cercle $O = 7$. Donc la surface du carré circonscrit $= 49$; et celle du carré inscrit $= 24,500$, alors la surface du carré égal au cercle $= 36,750$, $+ .991,148$, etc. $\times 1,750$; c'est-à-dire, que ce carré comprend d'abord la moitié du total des deux carrés, plus l'excédent de la circonférence du cercle O , sur son diamètre pris trois fois, qu'on multiplie par le quart de ce diamètre. Or, la circonférence $= 21,991,148$, etc. Otez donc de ce nombre trois fois le diamètre, c'est-à-dire, 21; le reste est la fraction .991,148, etc., qu'il faut multiplier

par le quart du diamètre qui est 1,750. Or, .991, 148, etc. $+ 1,750 = 1,734, 509$, etc. Joignez ce produit avec le nombre qui est la moitié du total des deux quarrés, c'est-à-dire, 36,750 $+ 1,734, 509$, etc. $= 38,484, 50$, etc., qui est la surface du quarré *stux*, égal au cercle *o*, dont le diamètre $= 7$. Donc, le rapport du quarré de tout cercle avec les deux quarrés inscrits et circonscrits à ce cercle, consiste, 1°. dans le nombre qui forme la moitié du total de ces deux quarrés; 2°. dans l'excédent de la circonférence du cercle sur le diamètre, pris trois fois, qu'on multiplie par le quart du diamètre.

Remarque. Il est évident, par la solution de ce problème, que le mécanisme du cercle et celui du quarré se tiennent l'un à l'autre; et que la circonférence, le quarré et le diamètre du cercle, conservent par-tout entr'eux un rapport essentiel qui forme l'identité de ces deux figures. C'est pourquoi les quarrés sont nécessairement entr'eux comme les circonférences, comme les diamètres ou les rayons, et comme les surfaces des cercles qu'ils représentent.

PROBLÈME DEUXIÈME.

Trouver par une même ligne, quatre fois le quarré égal en surface à un cercle proposé; c'est-à-dire, quatre fois les quatre lignes qui

92 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE,
 sont chacune moyenne proportionnelle entre
 le rayon de ce cercle et sa demie circonférence,
 et trouver en même-temps le rapport de la
 circonférence de ce cercle à son diamètre.

SOLUTION.

Suit le cercle a , figure 20, dont il faut
 trouver quatre fois le quarré égal à sa surface.
 Pour avoir la solution de ce problème, il faut
 d'abord chercher par le problème décisif *de la*
quadrature, page 109, *la ligne dont le*
quarré est égal à la surface du cercle a , en
 suivant la méthode géométrique que nous
 prescrivons. Soit bz , cette ligne dont le
 quarré égale la surface du cercle a ; soit bd
 $= 8,862,269$, etc.; bd , diamètre du cercle
 $= 10$. Cherchez l'excédent du diamètre sur
 cette ligne, qui sera $zd = 1,137,73$, etc. Ainsi,
 $8,862,269$, etc. $+ 1,137,73$, etc. $= 10$. Prenez
 quatre fois zd , qui fera la grandeur de la ligne
 gal , que vous diviserez en quatre parties égales;
 cette ligne, ainsi divisée également, vous don-
 nera la mesure arithmétique qui détermine tout
 d'uncoup les quatre lignes du quarré du cercle a ;
 et en tirant des deux côtés opposés du cercle,
 les lignes gd , hd , id et ld , vous aurez sur-
 le-champ deux fois le quarré égal à la surface
 du cercle a . En effet, après avoir partagé éga-

lement la corde gal aux points h et i , élevez perpendiculairement sur le point g la ligne dg , égale au diamètre du cercle, et une autre ligne semblable sur le point h , une autre sur le point i ; enfin la quatrième sur le point l . Appliquez ensuite la partie ah sur la ligne dh , et la partie hg sur dg , et la partie ai sur di , et la partie il sur dl , vous aurez, par ce moyen les quatre lignes qui seront coupées également aux points $haai$, en autant de moyennes proportionnelles entre le rayon du cercle A et sa demi-circonférence; donc vous aurez les quatre lignes qui formeront le quarré égal à la surface de ce cercle (1);

2°. Je dis que la corde gal , restant dans la position naturelle où elle se trouve, et étant divisée en quatre parties égales; coupe le diamètre bd quatre fois en moyenne et extrême raison, et donne encore, dans ces divisions, les quatre lignes qui forment le quarré égal au cercle. C'est pourquoi prenez pour la première division ah ; cette mesure étant retranchée du diamètre, le

(1) Comme le géomètre éternel a fixé, d'une manière particulière et bien simple, au milieu du cercle les quatre mesures qui forment les quatre côtés du quarré, de même il a placé, d'une manière aussi simple et aussi frappante, au milieu du quarré, les quatre lignes qui forment les quatre quarts de la circonférence du cercle.

coupe au point a et au point h en deux parties inégales, dont l'une est $ad = 5$, et l'autre $hb = 3,862,269$, etc. Or, $5 + 3,862,269$, etc., $= 8,862,269$, etc., qui est le côté du carré égal au cercle. Prenez la seconde division hg , cette mesure étant retranchée du diamètre, le coupera au point h et au point g en deux parties, dont l'une est $hd = 6,137,73$ etc., et l'autre est $gb = 2,724,53$ etc. Or, $6,137,73$ etc. $+ 2,724,53$ etc. $= 8,862,269$, etc., qui exprime la valeur du côté du carré égal au cercle. Il est évident que ces quatre lignes dans lesquelles le diamètre se trouve coupé, sont en proportion arithmétique, puisque c'est la même mesure qui sert à les comparer ensemble. Car on a cette proportion arithmétique $hd : ad :: hb : gb$. Or, le produit des extrêmes est égal à celui des moyens $6,137,730$, etc. $+ 2,724,538$, etc. $= 8,862,269$, etc., et $5 + 3,862,269$, $= 8,862,269$, etc. Ces quatre sections du diamètre faites par la moitié de la corde gal , donnent donc deux côtés du carré du cercle A . On aura les deux autres côtés en faisant les mêmes divisions sur l'autre moitié de la corde. Il est encore évident que ces lignes se trouvent coupées en moyennes et extrêmes raisons arithmétiques avec le diamètre. Car l'on a cette proportion continue : $10 : 5 + 3,862,269$, etc. $:: 5 + 3,862,269$, etc. $: 5 + 2,724,$

530, etc.; c'est-à-dire, 10 : 8,862,269, etc. : 8,862,269, etc. 17,724,530, etc. Dans cette proportion le produit des moyens est égal à celui des extrêmes. Donc, etc.

3°. Je dis que la moitié de la corde *gal*, restant toujours dans la position naturelle où elle se trouve placée, et étant divisée en quatre parties égales, coupe aussi le rayon quatre fois en moyenne et extrême raison et donne pareillement dans ses divisions, comme le diamètre, les quatre lignes du quarré égal au cercle *A*. Prenez donc la moitié de la ligne *gal*, c'est-à-dire, *ga*, que vous partagerez également *ap*, *ph*, *hn*, *ng*, lesquelles parties sont chacune la moitié de l'excédent du diamètre sur la ligne du quarré du cercle, et qui = 568,865, etc., moitié de 1,137,732, etc. Otez du rayon la première partie *ap*, il vous restera la ligne *bp*, qui est la moitié de la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence; c'est-à-dire, 5 — 558,865, etc. = 4,431,134, etc.; ôtez du rayon la seconde partie *ph*, alors le rayon se trouvera coupée en deux parties, dont l'une sera *ap* = 568,865, etc., et l'autre sera *hb* = 3,862,269, etc. Or, 568,865, etc. + 3,862,269, etc. = 4,431,134, etc., moitié du côté du quarré; ôtez du rayon la troisième partie *hn* etc., ôtez-en la quatrième partie *ng*, etc.; et en faisant l'addi-

96 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

tion des différens segmens du rayon, vous trouverez encore deux fois au quotient le nombre 4,431,134, etc. Voilà donc quatre moitiés de la moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence, produites par les divisions de la moitié de la corde *gal*, qui forment deux côtés du quarré. En faisant les mêmes opérations sur l'autre moitié de cette même corde, vous trouverez deux autres moyennes proportionnelles qui feront conséquemment deux côtés du quarré. Donc le rayon est coupé quatre fois, ainsi que le diamètre, en moyenne et extrême raison qui donne les quatre côtés du quarré égal à la surface du cercle. Donc, etc.

Remarque. Observez que pour parvenir à la solution de ce problème, c'est-à-dire, pour trouver la mesure arithmétique qui est l'excédent du diamètre du cercle sur la ligne de son quarré, il faut employer la proportion arithmétique qui donne l'excédent de la moitié du quarré inscrit sur le quart du diamètre; et c'est par ce moyen que l'on trouve dans tous les cercles cette mesure arithmétique qui nous donne tout d'un coup la ligne de leurs quarrés. Car, si l'on suppose le diamètre *bd* du cercle *A*, même fig., ≈ 7 ; alors *ha*, qui sera l'excédent de ce diamètre sur la ligne du quarré du cercle $\approx 796,411$, etc., on aura donc $7 - 796,411$, etc. $\approx 6,203,588$, etc., qui exprime

exprime la véritable grandeur de la moyenne proportionnelle entre le rayon 3,500, et la demi circonférence, 10,995,574, etc. Donc, etc.

(*Nota.* Dans cette remarque, page précédente, au lieu de ces mots, « il faut employer » la proportion arithmétique, qui donne l'ex-
« cédent de la moitié du quarré inscrit sur le
« quart du diamètre; » lisez, il faut employer la méthode géométrique que nous avons enseignée dans la solution du problème de la quadrature, page 109.)

Je dis en second lieu que la ligne *gal*, en restant toujours dans la même place, nous donne en même-temps le vrai rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, car cette ligne qui comprend quatre fois l'excédent du diamètre du cercle *a* sur la ligne de son quarré, égale la fraction 2,275,46, etc., en supposant que le diamètre = 10. Prenez le quart du diamètre qui égale 2,500, vous aurez cette proportion arithmétique; 2,275,461, etc.; : 2,500 :: 2,500 : 2,724, 538, etc.; or, la différence qui se trouve entre la grandeur de ces lignes comparées ensemble est cette fraction, .449,077, etc.; lequel nombre se trouve encore répété par la même comparaison arithmétique faite sur l'autre partie du diamètre, et forme ensemble la fraction totale .898,154, etc. Or, c'est ce nombre qui, étant multiplié par le

98 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE,
 quart des diamètres de tous les cercles, donne
 le seul et vrai rapport de la circonférence au
 diamètre, ainsi qu'il a été démontré ci-dessus.
 (Voyez le théorème premier de la page 77
 et les autres théorèmes suivants). Donc, etc.

On peut encore employer un moyen qui est
 plus simple. Prenez la grandeur $g\ a\ l$, c'est-à-
 dire, quatre fois $1,137,730,7$, etc., $= 4,550,$
 922 , etc., prenez ensuite l'excédent du rayon
 sur cette ligne, c'est-à-dire, $5 - 4,550,922$, etc.,
 $= .449,077,1$, etc.; faites la même opération sur
 l'autre partie du diamètre, alors vous aurez
 cette fraction, $.898,154$, etc., qui vous donnera
 le nombre que vous cherchez. Donc, etc.

PROBLÈME TROISIÈME.

Trouver les quatre quarts de la circonférence
 du cercle qui est égal en surface à un carré
 donné.

SOLUTION.

Soit le carré $a\ b\ c\ d$, fig. 22, il s'agit de
 trouver les quatre quarts de la circonférence
 du cercle qui lui est égal en surface. Commencez
 d'abord par inscrire dans un cercle le carré
 proposé, et par la méthode géométrique pres-
 crite dans la solution du problème de la qua-
 drature, page 109, vous trouverez la ligne,
 dont le carré égalera la surface de ce cercle.
 Soit le diamètre du cercle qui inscrit $= 10$. Le

côté de son quarré $= 8,862,269$, etc. Or, nous avons démontrés par le théorème 2^e. de la page 46, que *tout quarré inscrit trouve dans le quarré du cercle où il est inscrit, la circonférence d'un cercle qui lui est égal en surface*. Cette circonférence est composée des deux diagonales du quarré du cercle qui inscrit. C'est pourquoi le quarré dont le côté $= 8,862,269$ etc., a pour diagonale, $12,533,141$, etc., dont la moitié $= 6,266,570$, etc., lequel nombre exprime le quart de la circonférence du cercle que vous cherchez. Donc, en tirant les deux diagonales qui se couperont au centre du quarré, vous aurez les quatre quarts de la circonférence du cercle égal au quarré proposé par le présent problème.

Nous allons vous convaincre entièrement de cette vérité géométrique, qui vous fera comprendre en même-temps tout le mécanisme du cercle et du quarré intimement liés ensemble.

Si le diamètre du cercle qui inscrit, $= 10$, le côté du quarré qui est inscrit dans ce cercle, $= 7,071,067,8$, etc. Prenez l'excédent du diamètre qui égale 10, sur le côté de son quarré; cet excédent sera $z d$, fig. 20, qui $= 1,137,730$, etc. Construisez ensuite, par la méthode qu'enseigne la géométrie, le quarré dont $z d$ sera la diagonale. Or, le côté de ce petit quarré égalera la fraction, $.804,497$, etc. Prenez les quatre

160 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE.

côtés de ce petit quarré, et formez-en une seule ligne, qui sera égale à $n o p$, fig. 22. Or, je dis que la ligne $n o p$ contient quatre fois la mesure arithmétique qui coupe le côté du quarré inscrit $a b c d$, en moyenne et extrême raison, de manière que cette moyenne est le quart de la circonférence du cercle que l'on cherche.

Après avoir divisé également $n o p$, aux points $s s$; élevez sur chacun des points $n s$, $s p$, les quatre côtés du quarré dont vous cherchez le cercle; et sur chaoune de ces lignes, appliquez un segment de la mesure arithmétique $n o p$, vous aurez $n a - n s$; $s b - s o$; $s c -$ etc., etc. Or, la ligne $n a = 7,071,067,8$, etc. côté du quarré inscrit; et le rayon du cercle égal à ce quarré est $3,989,422$, etc. Par conséquent la circonférence de ce même cercle $= 25,066,285$ etc., dont le quart est $6,266,570$, etc. Donc, $n a - n s = 6,266,570$, etc., puisque $n s$ égale la fraction $.804,497$, etc. $n s = 2 d$; et $7,071,067,8$, etc., $= .804,497$, etc. $= 6,266,570$, etc., lequel nombre exprime le quart de la circonférence du cercle que vous cherchez. Donc, ce même nombre exprime aussi la valeur de la ligne $s b - s o$. En faisant la même application sur les autres lignes $s c$ et $p d$, il est évident que vous aurez, par ce moyen les quatre quarts de la

circonférence du cercle qui sera égal au quarré donné. Ainsi vous aurez la circonférence entière. Donc, etc.

Mais $7,071,067,8$, etc. — $6,266,570$, etc. ,
 $= .804,497$, etc.; et $6,266,570$, etc. — $.804,497$, etc. , $= 5,462,073$, etc.; or, ces trois lignes forment nécessairement une proportion arithmétique continue dont les moyens donnent un produit égal à celui des extrêmes, et qui comprend le nombre $12,533,141$, etc., c'est-à-dire, la demie circonférence du cercle égal au quarré donné. Donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de la solution de ces deux problèmes, que la mesure arithmétique qui donne le quart de la circonférence d'un cercle égal au quarré inscrit, est précisément le côté d'un petit quarré dont la diagonale se trouve être la mesure arithmétique qui donne le quarré du cercle qui inscrit. (Voyez le problème précédent). C'est-à-dire, comme $.804,497$, etc., est la mesure arithmétique qui donne le quart de la circonférence du cercle égal au quarré $7,071,067,8$, etc.; de même $1,137,73$, etc. est la mesure arithmétique qui donne le quarré égal au cercle dont le diamètre est 10. Voilà donc la raison géométrique qui fait que toute diagonale d'un quarré quelconque doit être nécessai-

rement la demi-circonférence d'un cercle égal à un quarré inscrit. En effet, comme la mesure arithmétique qui donne le quarré du cercle et celle qui donne le cercle du quarré, forment ensemble un petit quarré dont l'une est le côté, et l'autre la diagonale; de même la diagonale du grand quarré $m n r s$, fig. 10, est la demi-circonférence du cercle égal au quarré inscrit $a b c d$, tandis que ses côtés forment le quarré du cercle qui inscrit.

Nous n'avons donné les deux problèmes précédents, qu'afin de développer entièrement le mécanisme du cercle et du quarré, et pour faire voir que le lien mutuel qui les unit étroitement, tient jusqu'à leurs racines.

Remarque. Il est impossible de comprendre dans un nombre entier le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre. C'est pourquoi tous les plus grands mathématiciens se sont efforcés vainement à le déterminer par un nombre fini. Cette vérité, ainsi que nous l'avons déjà dit, suit naturellement de notre problème fondamental de l'*incommensurabilité du cercle*. Cependant il falloit dans l'usage avoir un moyen facile qu'on pût employer, et qui approchât le plus près possible du vrai rapport. Le grand Archimède nous a donné le rapport de 22 à 7. Mélius, Hollandois, nous a donné un rapport qui approche beaucoup plus

du véritable, et qui est celui de 355 à 113. Que l'homme qui est enflé de ses vaines connoissances, considère ici qu'il ne sera jamais capable d'avoir la valeur exacte et absolue de la circonférence d'aucun cercle, ni de ses diverses parties, ni même d'un seul point le plus petit ? cette réflexion doit bien humilier notre orgueil : telle est la raison qui nous force dans tous nos calculs, de supposer le diamètre du cercle divisé en un million de parties, afin de rendre les erreurs insensibles. Mais je dis bien plus qu'on est forcé de diviser les *tangentes* et les *sécantes* en des parties encore plus petites que celles des autres lignes. Eh ! d'où vient cette différence ? La raison en est frappante ; c'est parce que les *sécantes* sont des lignes qui se coupent en deux parties, et parce que les *tangentes* sont des lignes qui, étant moyennes proportionnelles, s'emploient doublement dans la même opération, et conséquemment l'erreur que l'on commet à l'égard de ces lignes, devient double. Il est donc évident qu'afin de rendre les erreurs moins sensibles, dans ces circonstances, il a fallu de toute nécessité diviser les *tangentes* et les *sécantes* en des parties beaucoup plus petites que celles des autres lignes. Mais n'allez pas conclure de là que la géométrie est une science incertaine : ses fondemens sont inébranlables ; toutes les règles qu'elle

104 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE,
 nous prescrit sont invariables. Quoiqu'elle ne
 nous donne par la proportion géométrique que
 des grandeurs relatives; néanmoins elle nous
 fait connoître d'une manière sûre le rapport que
 ces grandeurs ont entr'elles. Cette imperfection
 provient de ce que les géomètres ne connoissant
 pas et ne pouvant jamais connoître la valeur
 entière de la circonférence du cercle, man-
 quent d'un point fixe pour déterminer la pre-
 mière grandeur qui doit servir à leur faire
 connoître ensuite toutes les autres. Cependant,
 quoique nous n'ayons pas la valeur absolue
 d'aucune ligne, l'on peut approcher aussi près
 que l'on veut de la racine de toutes les lignes,
 même des incommensurables.

PROBLÈME

DE LA QUADRATURE DU CERCLE.

Il n'y avoit qu'un seul moyen géométrique
 pour parvenir à la solution de ce fameux pro-
 blème. C'étoit un seul point qu'il falloit d'abord
 trouver; et l'on s'est toujours appliqué à la recher-
 che immédiate de la ligne dont le quarré pou-
 voit être égal à la surface du cercle. J'avoué que
 j'ai suivi, comme les autres, le même chemin,
 sans pouvoir parvenir au but que je croyois sou-
 vent avoir atteint. Ce n'est qu'après mille et
 mille efforts réitérés pendant plusieurs années
 entières, et toujours inutiles, que je me suis

enfin décidé à quitter la route commune qui m'avoit été frayée par la multitude des savants. Persuadé de l'existence de cette première vérité de la nature qui dans ses diverses opérations, part toujours d'un seul et même principe, j'ai jugé que tout espace curviligne et circulaire, devoit nécessairement se réduire au quarré, ainsi que tout espace rectiligne. Ce jugement m'a paru fondé, lorsque j'ai considéré que l'aire qui se trouve comprise entre les *lunules* et dans la *parabole*, pouvoit être démontrée géométriquement égale à la surface d'un quarré. Ainsi je voyois évidemment le cercle et le quarré, comme les deux points de réunion où toutes les figures, quelles qu'elles soient dans la nature, viennent se rassembler, en échangeant, chacune, leurs différentes modifications. J'ai employé la proportion arithmétique, et c'est avec son secours que je suis venu à bout de découvrir le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, et ce même rapport de la circonférence du cercle au côté de son quarré; bientôt j'ai connu que la diagonale de tout quarré étoit la demie circonférence rectifiée d'un cercle égal à un quarré inscrit; ensorte que l'éternel géomètre a placé la circonférence de tous les cercles au milieu même du quarré. Tous les hommes ont eu cette ligne admirable

sans cesse exposée à leurs yeux, et les plus grands génies qui ont existé sur la terre, n'ont cessé de travailler et d'opérer en cent manières différentes sur cette même ligne, et Dieu a voulu que pendant des milliers d'années, aucun d'eux ait jamais pu connaître quelle étoit cette ligne.

Cette première découverte faite, alors j'em'aperçus que j'avois déjà fait un grand pas vers le but où je voulois aller. Je me suis armé de plus en plus de courage et de patience afin de vaincre tous les obstacles, et j'avois le soin de fermer constamment les oreilles à la voix des savants, qui de toutes parts m'annonçoient que mes tentatives resteroient inutiles; mais le ciel a secondé mes efforts. Telle est la marche que mon esprit a suivie dans cette grande découverte et que j'ai même suivie dans mon ouvrage, où l'on voit que le rapport de la circonférence au diamètre, m'a été connu long-temps avant la solution du problème de la *quadrature* du cercle. C'est ce rapport qui m'a fait comprendre que c'étoit le quart du diamètre qui pouvoit seul me conduire à la solution de ce fameux problème, où tout se résout par le quart; et en effet, tout quarré est le quart d'un autre quarré, (vous observerez que le point *e* qui indique le point *n*, point décisif de la *quadrature du cercle*,

Figure 26, est déterminé par le rayon qui est le quart du diamètre au point central *a*, et qu'il est fixé en même-temps par ce même quart au point central *o*, et c'est ainsi que je suis enfin parvenu à trouver la solution géométrique de la *quadrature du cercle*.

Eh ! quel est donc l'homme qui pourroit dire aujourd'hui qu'une pareille découverte a été faite par hasard ? Certainement il y a beaucoup d'inventions humaines qui lui doivent leur origine. L'invention de la poudre, celle du télescope, celle de l'aimant, etc., ne sont dues qu'au hasard qui semble dans ces circonstances consoler l'esprit humain de la peine et de l'inutilité de ses recherches par le bonheur de ses rencontres. Mais tel est le langage de la plupart des hommes. Ce qu'ils ont tenté de découvrir par eux-mêmes, et ce qui a résisté continuellement à toutes leurs tentatives, ils le déclarent impossible. Quelqu'un vient-il à bout de réussir dans cette même entreprise ? Ils s'écrient aussitôt, que le succès imprévu n'est qu'un effet du hasard. (ô triste humanité !). Il faut distinguer deux sortes d'inventions, dont les unes peuvent être produites par une heureuse rencontre, et dont les autres sont le résultat nécessaire des différentes combinaisons de l'esprit. Quelque soit l'empire du hasard sur les découvertes faites par

les hommes ; il sera toujours nécessaire de connoître une science, avant de pouvoir en résoudre l'une de ses plus grandes difficultés : sans une certaine connoissance de la géométrie, il étoit impossible de découvrir la *quadrature du cercle*. Cette découverte embrasse l'univers entier, où tout roule dans les cercles proportionnellement à leurs quarrés ; elle est la clef de toutes les autres découvertes. C'est à Dieu, *le géomètre éternel*, comme Platon l'appelle, c'est à lui seul que j'en rapporte toute la gloire.

Nota. On observera que c'est par le moyen de la proportion arithmétique que je suis parvenu à découvrir cette quatrième proportionnelle que j'ai ajouté au quarré de l'hypoténuse, page 122. J'ai fait la découverte de ce beau théorème dans l'endroit qui a été le plus fréquenté et le plus approfondi par les géomètres. Tous les jours ils faisoient usage du *Co-sinus*, et ils n'ont point aperçu en lui ce moyen proportionnel qui existe entre les deux segmens du diamètre. Je pense que les géomètres négligent un peu trop cette sorte de comparaison, dont ils retireroient de grands avantages.

Quoique le rapport de la circonférence au diamètre dépende d'une mesure arithmétique, cette mesure ne peut point par elle-même servir à résoudre le problème de la *quadrature*, parce qu'une ligne ne peut être considérée comme la mesure arithmétique

Commune à deux autres lignes, sans être le résultat de la comparaison arithmétique de ces deux mêmes lignes. Or, pour les comparer, il faut avoir ces grandeurs et les approcher toutes les deux, afin d'en voir la différence. Ce qui est impossible dans l'hypothèse. Nous allons résoudre enfin la difficulté, d'une manière décisive.

P R O B L È M E.

Trouver la ligne dont le quarré est égal à la surface d'un cercle donné, c'est-à-dire, trouver la moyenne proportionnelle entre le rayon de ce cercle, et sa demi-circonférence.

S O L U T I O N.

Nous diviserons la solution de ce problème en deux parties.

Première partie de la solution. 1°. Soit le cercle a dont il s'agit de trouver le quarré, Formez d'abord dans votre cercle, là où il vous plaira, un triangle équilatéral, dont chaque côté soit égal au rayon $a b$; mais faites en sorte qu'un angle de ce triangle se trouve placé au centre du cercle a , et que les deux autres angles viennent aboutir à la circonférence, comme $a b c$, dans la figure 26; ensuite de l'angle c , il faut décrire un autre cercle qui soit entièrement égal au cercle a , et dont le centre sera le point c . Alors sur le côté

ca , il faut tirer un quadrilatère dont les côtés seront égaux et parallèles à ca : Pour trouver le parallélisme exact de cette ligne, on prendra avec le compas la grandeur du rayon et du point e qui est le milieu de la ligne ca , l'on décrira le petit arc pr , qui sera appuyé sur les deux circonférences égales de a et de c , et qui donnera le vrai parallélisme de la ligne ca . Alors du point d'intersection r , il faut tirer la ligne ra qui sera l'un des côtés de votre quadrilatère; et du point r , passant par l'autre point d'intersection p , on tirera la ligne rl parallèle à ca , et du point l , la ligne lc parallèle à ra ; ces lignes formeront avec ca , un parallélogramme obliquangle qu'on nomme *rhombe*, dont les quatre côtés $aclr$, seront chacun égal au rayon. Cela posé, il s'agit de trouver dans le parallélogramme obliquangle la perpendiculaire qui déterminera celle qu'il faut prendre dans le cercle. À cet effet, en tirant les deux diagonales al et cr , le point o de leur intersection sera nécessairement le centre du rhombe, et sera par conséquent perpendiculaire aux quatre points $aclr$. Pour vous en convaincre, observez seulement que ce parallélogramme se trouve divisé par les deux diagonales en quatre rectangles qui sont entièrement égaux. Car il y a égalité entre ces triangles, s'il y a une égalité parfaite entre leurs côtés respectifs de chacun à chacun. Or, rien n'est plus évident;

car les hypothénuses de ces quatre triangles sont égales au rayon d'après la supposition , et leurs côtés sont formés par la moitié de chacune des deux diagonales qui se coupent au point o à angles droits. Donc les trois côtés sont égaux ; donc la ligne co est perpendiculaire à la ligne al ; donc en divisant le cercle a en quatre parties égales , à commencer au point d et en tirant les deux diagonales , on aura les deux diamètres qui se couperont perpendiculairement l'un à l'autre au point a .

2°. Il s'agit à présent de trouver la ligne dont le quarré est égal au cercle. Abaissez du point g de la circonférence du cercle sur le diamètre une perpendiculaire qui tombe au point f , ensorte que df soit le quart de votre diamètre ; et sur cette perpendiculaire fg prenez nf égal à em . Alors, du point d vous tirerez la ligne dy qui passera par le point n ; et vous aurez enfin ys qui sera le quart de la ligne dont le quarré égalera la surface du cercle a .

En voici la démonstration : Soit le rayon du cercle $a = 5$. Le côté du quarré égal en surface à ce cercle $= 8,862,269$, etc., dont le quart $= 2,215,567$ etc. Il s'agit donc de prouver que ce dernier nombre exprime la grandeur réelle de la ligne ys . A cet effet , tirez du point y au centre a , la ligne ya ; vous aurez le triangle rectangle ysa , dont l'hypothénuse sera le rayon $ya = 5$. ya^2

$= 25$. J'ai dit que $ys = 2,215,567$ etc. Donc $ys^2 = 4,908,738$ etc. Donc $ya^2 - ys^2 = sa^2$; c'est-à-dire, $25 - 4,908,738$ etc. $= 20,091,261$, etc. , dont la racine quarrée est $4,482,327$ etc. , valeur de sa . Il nous reste à présent à démontrer que ce dernier nombre est la valeur de la ligne sa . Tirez du point y la ligne yh ; vous aurez le triangle rectangle hyd , dont l'hypothénuse sera le diamètre. Alors , au point f sur ce diamètre , prenez avec le compas le quart du diamètre , et tracez la demi-circonférence aid qui coupera la ligne dy en deux parties égales au point i . En tirant de ce même point i la ligne ia , vous aurez nécessairement deux triangles rectangles entièrement semblables , dont l'un aura ses trois côtés qui seront doubles des trois côtés de l'autre. Enfin , si du sommet de l'angle droit du petit triangle et du grand triangle rectangles , vous abaissez sur l'hypothénuse les perpendiculaires iv et yk , alors le grand triangle hyd se trouvera divisé en deux autres triangles qui lui seront semblables , et qui seront semblables entr'eux ; et le petit triangle rectangle aid se trouvera pareillement divisé en deux autres triangles semblables , dont tous les côtés seront la moitié des côtés correspondans du grand triangle , puisque celui-ci est le double de l'autre. Or , dans la résolution de tous ces triangles , la perpendiculaire yk qui est égale à la ligne $sa = 4,482,327$ etc. ,

(en

(en supposant le rayon du cercle $= 5$), et la perpendiculaire ik qui est moitié de $ys = 2,241,163$ etc. Donc la ligne $ys = 2,215,567$ etc. Donc elle est le quart de la ligne dont le quarré égale la surface du cercle a .

Mais si vous prolongez la ligne ys jusqu'au point u de la circonférence, vous aurez conséquemment la moitié du côté du quarré égal au cercle, fig. 25. D'après cela, il vous sera facile de construire une exagone qui vous donnera le côté entier de ce même quarré, en tirant du point u la ligne ut égale au rayon qui tombera sur le diamètre au point t , et en tirant de ce point t une autre ligne égale au rayon qui tombera au point s sur la circonférence, etc.; ensorte que cet hexagone aura quatre côtés correspondans qui seront égaux au rayon du cercle a , et les deux autres côtés opposés seront chacun égal à la moitié de la ligne qui forme le quarré du cercle. Pour le prouver, il faut tirer des angles y et u le rayon oblique au centre A ; ce qui vous donnera deux triangles *isocèles* uay et ayq , lesquels se trouvent égaux en tout; car si vous tirez le rayon droit sa et la perpendiculaire yk égal au rayon droit, vous aurez quatre triangles rectangles parfaitement semblables; dont les hypoténuses sont formées par le rayon oblique, les côtés moyens par le rayon droit, et les petits côtés par le quart de la ligne dont le

quarré égale la surface du cercle. Donc la ligne aq est la ligne entière du côté du quarré égal à la surface du cercle A .

Deuxième partie de la solution. Après avoir trouvé par le moyen du triangle équilatéral, ainsi que je viens de l'enseigner, le point n , qui est le point décisif de la quadrature du cercle, prenez avec le compas la grandeur de la ligne na , fig. 27, et décrivez la circonférence du cercle qui passe par les points a c u d/a . Du point a tirez le rayon au , et du point u tirez la ligne oblique ud . Vous aurez donc le triangle isocèle au d . Du sommet de l'angle a compris entre les côtés égaux, abaissez la perpendiculaire ab sur la base ud , qui se trouvera nécessairement coupée en deux parties égales au point b . Alors de ce point b décrivez la demi-circonférence du cercle dont le diamètre sera ud . Il est évident que cette circonférence coupera le côté du triangle isocèle au en deux parties inégales au point g , ensorte que vous aurez les deux segmens ag et gu . Sur la partie gu , prenez gl égal au segment ag , de manière que vous aurez la ligne al , et le petit segment ul . Cela posé, je dis que al est la moitié de la ligne, dont le quarré se trouve égal à la surface du cercle a , et que le petit segment ul est l'excédent du rayon ou de la moitié du diamètre du cercle sur cette moitié du côté de son quarré. Pour le démontrer, tirez du point d

la ligne dp qui passe par le point l , alors au et dp seront deux cordes du cercle excentrique qui se couperont au point l . Or, les parties de l'une sont réciproques aux parties de l'autre; car si du point a l'on tire la ligne ap , les angles apd et aud seront égaux, puisqu'ils se trouvent appuyés sur le même arc ad . Les angles $pa'u$ et pdu sont aussi égaux, se trouvant appuyés sur le même arc up . Enfin les angles opposés au sommet sont encore égaux. On a donc cette proportion géométrique. $dl : al :: ul : pl$, c'est-à-dire, 5 : 4, 431, 134, etc. :: 568, 865, etc. : 504, 143, etc. Or, dans cette proportion le produit des moyens est égal à celui des extrêmes, et de part et d'autre = 2, 520, 719, etc. Donc la ligne $al = 4, 431, 134$, etc., qui est la valeur de la moitié du côté du quarré égal au cercle, dont le rayon = 5. Donc le petit segment $ul = 568, 865$, etc., valeur de la moitié de la mesure arithmétique qui coupe le diamètre en moyenne et extrême raison, et qui nous donne le côté du quarré égal au cercle.

Mais si vous tirez la corde du petit arc up , vous aurez tout-d'un-coup un *quadrilatère* inscrit dans le cercle excentrique; et le produit du rectangle des deux diagonales, dp multiplié par au , sera égal à la somme des deux rectangles des côtés opposés, ad multiplié par up + ud multiplié par ap , c'est-à-dire, 5, 504, 143, etc. multiplié par 5 =

116 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE;

27,520,719, etc. Et les côtés, .568,865, etc. multiplié par 5 = 2,844,326, etc. + 5,276,772, etc. multiplié par 4,676,417, etc. = 24,676,39, etc. lequel nombre joint avec 2,844,326, etc. = 27,520,719, etc. Donc, etc.

Observez que vous avez ici deux triangles isocèles *a u d*, dont *u d* est la base; et *a d l*, dont *a l* est la base. Si de l'un des angles de la base de chacun de ces deux isocèles, et si de l'angle compris entre leurs côtés égaux, vous abaissez les perpendiculaires, vous aurez une proportion entre la base et l'un des côtés égaux, et entre les deux perpendiculaires. Il y a donc dans le premier triangle isocèle *a u d* cette proportion, $u d : a u :: u s : a b$, c'est-à-dire, 5,276,772, etc. : 5 :: 4,482,327, etc. : 4,247,223. Or, dans cette proportion le produit des moyens est égal à celui des extrêmes, et ce produit de part et d'autre = 22,411,635, etc. Donc, etc. Dans l'autre triangle isocèle *a d l*, vous trouvez aussi cette proportion $a d : a l :: d g : l x$, c'est-à-dire, 5 : 4,431,134, etc. :: 4,482,327, etc. : 3,972,359, etc. Or, dans cette proportion le produit est encore égal à celui des moyens, et = 19,861,795, etc. Donc, etc.

D'après toutes ces proportions évidentes, il vous sera facile de construire un hexagone qui terminera la solution de ce problème, en réunissant la proportion arithmétique avec la géométrie. Il

ne s'agit que de tirer du point u de la circonférence, en passant par le point l , le diamètre uv , et de retrancher sur les deux extrémités de ce diamètre la grandeur de la ligne ul , qui est la moitié de la mesure arithmétique qui coupe le diamètre en moyenne et extrême raison, et qui n'est que son excédent sur le côté du quarré du cercle, ainsi qu'il a été démontré. Ensuite du point l il faut tirer la ligne lm égale au rayon du cercle qui tombe sur la circonférence, et du point m vous tirerez la ligne mf égale et parallèle à la ligne al , du point f le rayon fh , etc., par ce moyen, vous aurez cet hexagone, même fig. $lmfhtd$, dont les quatre côtés correspondans sont formés par le rayon du cercle, et les deux côtés opposés par la moitié de la ligne du quarré du cercle. Il est évident que la ligne lh , placée au milieu de cette figure, vous donne d'abord la ligne dont le quarré est égal au cercle, que les deux lignes mf et td en sont les deux moitiés, et que les quatre segmens 1. 2. 3. 4, qui coupent par moitié les côtés égaux des quatre triangles isocèles, sont les quatre quarts de la ligne du quarré. Je n'étendrai pas plus loin cette démonstration qui est la plus simple et la plus frappante aux yeux de tout le monde. Donc, etc.

Remarque importante.

1°. Observez attentivement que la solution de ce problème admirable nous constate qu'il étoit impossible à l'homme de trouver immédiatement et directement dans le cercle lui-même la ligne du quarré égal à la surface de ce même cercle, parce que le rapport du diamètre du cercle au côté de son quarré est un rapport arithmétique. Il falloit donc chercher cette ligne dans un autre cercle, et le point central de ce cercle excentrique est le point décisif de la quadrature. Nous découvrons donc clairement aujourd'hui quel est l'obstacle véritable qui a empêché jusqu'à présent les plus grands génies de parvenir à la solution de ce problème. C'est parce qu'ils ont cherché tous dans le cercle immédiatement la ligne dont le quarré étoit égal à ce cercle; ils ignoroient que le passage de la ligne circulaire à la ligne droite ne consistoit que dans un seul point, et que ce point étoit l'intermédiaire par lequel ils pouvoient arriver à la mesure arithmétique qui coupe le diamètre du cercle en moyenne proportionnelle entre le rayon et la demi-circonférence, et sans laquelle il est impossible à l'homme d'avoir le vrai rapport de la circonférence au diamètre. Ils confondoient la quadrature du cercle avec la quadrature de l'ellipse, de la parabole et des autres figures. Ils ne faisoient

pas attention qu'il y avoit nécessairement une grande différence:

Le cercle par sa nature ne tient en rien dans son principe, des autres figures. Lui seul est indépendant, et toutes dépendent de lui. Elles ne sont, comme nous l'avons déjà prouvé, que des modifications diverses que le cercle s'approprie. Rien ne peut lui ravir la figure circulaire qui forme son essence. Elle est éternelle et semblable aux dieux.

Hæc æterna manet, divisi quæ simillima forma,

Cui neque principium est, neque finis in ipso. Man. de Astr.

Toutes les autres figures sont comme autant de formes variées à l'infini que le cercle prend, et dans lesquelles il se change. N'est-il pas évident que toutes les courbes dérivent d'un cercle primordial avec lequel elles conservent un rapport naturel? Archimède, en découvrant la quadrature de la parabole, avoit bien considéré que les quarrés des diamètres des cercles avoient un rapport marqué avec leurs surfaces, comme les diamètres en ont avec le quart de leur circonférences. C'est pourquoi il jugea que la surface de la parabole devoit avoir une raison déterminée avec le rectangle formé par les deux axes de son diamètre. En effet, il a démontré par une proportion arithmétique que la surface parabolique étoit égale aux deux tiers du rectangle de ses deux diamètres, c'est-à-dire du rec-

tangle circonscrit à la parabole. Il a paru surprenant aux géomètres qu'*Hippocrate de Chio* ait pu quarrer si facilement les lunules, tandis qu'on ne pouvoit encore découvrir la quadrature du cercle. Mais ils n'ont pas fait attention que cette facilité provenoit de ce que les lunules sont terminées chacune par des portions de différentes circonférences; au lieu que l'aire circulaire se trouve circonscrite par une seule et même ligne. Ces différentes circonférences forment nécessairement différens rapports entre les diverses parties de ces lunules. C'est ainsi que les ellipses, les paraboles, etc. ont toutes plusieurs foyers et différens axes qui établissent nécessairement plusieurs raisons géométriques entre les *abscisses* et leurs *ordonnées*. Mais dans le cercle il n'y a qu'un seul et même rapport entre tous les points de la circonférence et le centre, parce que le cercle est semblable à lui-même dans son entier et dans toutes ses parties.

Similis toto remanet, perque omnia par est.

2°. Observez que la solution de ce problème nous donne la juste mesure de toutes les lignes que nous avons découvertes dans nos différens théorèmes par la proportion arithmétique, et que nous avons établies comme autant de liens naturels qui unissent le cercle et le quarré, et qui forment leur *identité géométrique*. Cette solution nous démontre aussi que tous les géomètres ont eu tort de

confondre le problème de la quadrature avec le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, puisqu'en effet j'avois découvert l'un bien long-temps avant l'autre. Ils ont donc eu tort de dire, et de soutenir que la solution du fameux problème de la *quadrature du cercle* ne consistoit qu'à trouver le rapport exact et parfait entre le diamètre et la circonférence, puisque nous avons démontré que ce rapport étoit une raison composée arithmétique dont on ne peut assigner la fin, et puisque nous démontrons ici, par le fait même, que la solution de ce problème peut être donnée par un rapport géométrique : car il faut convenir que notre solution arithmétique est conforme entièrement à la vérité. Ils croyoient tous qu'il ne s'agissoit dans ce problème que de rectifier la circonférence du cercle ; ils ignoroient que la ligne droite, égale à la circulaire, se trouvoit naturellement tracée au milieu du quarré, et que les circonférences de tous les cercles étoient les diagonales de tous les quarrés.

PROBLÈME PREMIER.

Faire un quarré égal en surface à la portion d'un cercle renfermée par la corde d'un arc de 90 degrés.

Solution.

Soit le cercle *a*, fig. 23 dont une portion est

terminée par la corde $b c$ qui soutient un arc de 90 degrés. Il s'agit de trouver un quarré égal à la surface de l'arc $b d c$. Pour y parvenir, cherchez d'abord le quarré du cercle a . Soit $f g$ le côté de ce quarré, soit $f h$ la moitié de cette ligne. $f h^2 =$ le quart de la surface du cercle. Ensuite du point m qui termine le diamètre, tirez la ligne $m r$ égale à $f h$ moitié du côté du quarré du cercle, et du point r abaissez sur le diamètre la perpendiculaire $r s$. Ainsi vous aurez un triangle rectangle dont l'hypothénuse sera $m r$, et les deux côtés seront $r s$ et $m s$. Donc $m r^2 = r s^2 + m s^2$. Or, $m r^2$ égale le quart du cercle. Donc $r s^2 + m s^2$ égalent ensemble le quart de sa surface. Mais il est évident que $r s^2$ est égal au quart du quarré inscrit. Donc $m s^2$ est égal à la portion du cercle renfermée par la corde $b c$. Car par la construction du quarré inscrit, il est facile de voir que le quart de la surface du cercle comprend d'abord le quart du quarré inscrit, et ensuite les deux moitiés de l'arc $b d$ et $b m$, c'est-à-dire, l'arc entier $b d c$. Donc la ligne $m s$ est le côté du quarré égal à la surface de l'arc de 90 degrés. Donc, etc., $c q f d$.

THÉORÈME PREMIER.

Toute ligne perpendiculaire abaissée d'un point de la circonférence d'un cercle sur le diamètre, coupe nécessairement le rayon et le diamètre en

deux parties, de manière que cette ligne est moyenne proportionnelle entre l'un des segments du rayon et entre tout le reste du diamètre, et que l'autre segment du rayon est la moyenne proportionnelle entre l'excédent du rayon sur cette perpendiculaire et entre tout le reste du diamètre.

Démonstration.

Soit le cercle *a*, fig. 16 ; si du point *d* vous abaissez la perpendiculaire *d b* sur le diamètre *c a f*, il est évident que cette ligne coupe le rayon *c a* au point *b* en deux parties, et pareillement le diamètre *a f*. Or, je dis, 1^o. que cette perpendiculaire est moyenne proportionnelle entre le segment *c b* du rayon, et *b f* qui est le reste du diamètre. Cette première proposition est démontrée dans tous les livres de géométrie ; il est inutile d'en faire ici la preuve. Je dis, 2^o. que l'autre segment du rayon *b a* est moyen proportionnel entre l'excédent du rayon sur la perpendiculaire et entre tout le reste du diamètre. En effet, prenez ce segment *b a* du rayon, et formez-en une perpendiculaire au point *m*, en sorte que la ligne *o m* soit égale à *b a*, et touche la circonférence ainsi que le diamètre. On a donc cette proportion continue, $c m : o m :: o m : m f$. Or, *c m* est l'excédent du rayon *c a* sur la perpendiculaire *d b*. Pour le démontrer, soit le rayon $c a = 5$;

124 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE.

donc le diamètre $cf = 10$. Soit la perpendiculaire $db = 4,452,221$, etc. Or, $5 - 4,452,221$, etc. $= .547,778$, etc. Donc, le reste du diamètre $mf = 9,452,221$, etc. La fraction cm multipliée par $mf = 5,177,724$, etc. La racine quarrée de ce dernier nombre sera la valeur de om ou de $ba = 2,275.461$, etc. Donc $om^2 = cm$ multiplié par mf . Donc $db = ma$. Pour en constater la vérité, tirez du point o la ligne oa , vous aurez le triangle rectangle oma , dont le rayon est l'hypothénuse. Donc $oa^2 = om^2 + ma^2 = 19,822,275$, etc. et $om^2 = 5,177,724$, etc. Le total de ces deux quarrés réunis $= 25$, qui est le quarré du rayon oa . Or, le triangle oma est entièrement égal au triangle dba , et leurs produits sont semblables. Donc, la ligne $ma = db$, et cm est l'excédent du rayon sur la perpendiculaire db . Donc, le segment ba est moyen proportionnel entre cm et mf . $c. q. f. d.$

COROLLAIRE.

Il suit de cette démonstration que, si l'on abaisse d'un point de la circonférence du cercle et de l'angle droit d'un triangle rectangle, fig. 19, une perpendiculaire sur le diamètre qui en sera l'hypothénuse, comme db , il se trouvera quatre moyennes proportionnelles, au lieu de trois que les géomètres ont découvertes jusqu'à présent,

c'est-à-dire, on aura chaque côté df et dc de l'angle droit, qui sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière ou le diamètre, et entre sa partie correspondante; on aura la perpendiculaire db , qui sera moyenne proportionnelle entre les deux parties de l'hypothénuse; et l'on aura de plus la partie du diamètre située entre la perpendiculaire et la moitié du diamètre ba , qui sera moyenne proportionnelle entre l'excédent du rayon sur la perpendiculaire cm , et entre tout le reste du diamètre mf . Il est évident que ce théorème est fondé sur la proportion arithmétique, puisqu'il faut nécessairement comparer d'abord la perpendiculaire avec le rayon, afin d'en prendre la différence qui n'est que l'excédent de la moitié du diamètre sur cette perpendiculaire.



Je remets à un autre temps peu éloigné, plusieurs autres théorèmes et problèmes intéressans que je me proposois de donner ici, parce qu'ils sont une suite de cette découverte qui va frayer une nouvelle route aux géomètres, et qui va augmenter de plus en plus les connoissances humaines.

Impossibilia, dum ignores;
Ubi cognoveris, facilia.

F I N.

TABLE DES MATIÈRES.

PREFACE,	page j
<i>Arrêté particulier de l'Académie des sciences, au sujet de la quadrature du cercle,</i>	ii
<i>Faux préjugé contre le problème fameux de la quadrature du cercle,</i>	ix
<i>Instrument hydraulique pour accélérer considérablement la marche des vaisseaux,</i>	xiv
<i>Cause physique du flux et reflux des mers, avec un aperçu des absurdités du système de Newton à l'égard de ce phénomène,</i>	xvj
CHAPITRE PREMIER. Du cercle et de sa nature ;	1
<i>Propriété admirable de la ligne circulaire ou courbe pour conserver et perpétuer le mouvement,</i>	3
<i>Un corps, supposé se mouvoir continuellement suivant la direction d'une ligne droite, est un corps chimérique,</i>	4
<i>Prodiges de l'art et de la nature opérés par le moyen du cercle,</i>	8
CHAP. II. De la quadrature du cercle,	14
<i>Avantages précieux qui résultent de la découverte de la quadrature du cercle,</i>	18
<i>Théorème fondamental. La circonférence et son diamètre sont incommensurables, c'est-à-dire, que leur rapport géométrique ne peut être exprimé en nombres,</i>	20
COROLLAIRE PREMIER,	27
COROLLAIRE II. Il n'y a dans la nature aucun cercle dont la circonférence comprenne un nombre entier et fini,	29
<i>L'existence du mouvement en ligne circulaire, prouve nécessairement l'existence d'un Dieu,</i>	30
<i>Origine naturelle des nombres et des mesures,</i>	35
<i>Lemme. Le cercle, par sa nature, peut se changer en toutes sortes de figures,</i>	36
<i>Autre démonstration plus rigoureuse,</i>	40
CHAP. III. Du quarré et de sa nature,	43
THÉORÈME PREMIER. Le cercle et le quarré sont, par leur nature, enchaînés l'un à l'autre par un lien géométrique qui leur est commun,	45

THEOREME II. Tout quarré inscrit trouve dans le quarré du cercle où il est inscrit, la circonférence rectifiée du cercle qui lui est égal en surface, 46

THEOREME III. Tout cercle contient dans son diamètre la ligne qui forme le quarré égal à sa surface, etc. 50

Remarque importante, 55

THEOREME IV. Tout quarré est le quarré d'un cercle dont le rayon sert lui-même à composer le côté de ce quarré, en sorte que, etc. *ibid.*

THEOREME V. Tout côté d'un quarré, divisé en deux parties égales et en deux parties inégales, dont l'une est le rayon du cercle même qui est égal à ce quarré, comprend dans cette simple division de la ligne, quatre fois le quart, quatre fois la moitié, quatre fois la totalité de la surface de ce cercle, 59

CHAP. IV. Rapport du cercle à son quarré, de la circonférence du cercle à son diamètre, du quarré du cercle à ses quarrés inscrits et circonscrits, de la diagonale à ses côtés, 69

Lemme. Il est impossible de trouver un cercle qui, dans sa circonférence ou dans une partie quelconque de sa circonférence, comprenne un nombre entier et fini. Autre démonstration fondée sur le mécanisme du cercle, 74

THEOREME PREMIER. Tout quarré est le quarré d'un cercle, et la ligne qui forme ses côtés se trouve composée, 1°. du rayon entier de ce même cercle; 2°. de la moitié de ce rayon; 3°. du quart de ce rayon; 4°. de ce même quart, etc. 77

THEOREME II. La demi-circonférence de tout cercle est composée, 1°. de la ligne entière moyenne proportionnelle entre elle-même et son rayon; 2°. de la moitié de cette même ligne; 3°. de son quart; 4°. de ce même quart, etc. 81

THEOREME III. Toute circonférence d'un cercle est composée, 1°. du diamètre entier de ce même cercle, de sa moitié, de son quart, et de ce même quart, etc.; 2°. du total de ces différens nombres, de la moitié, du quart, et de ce même quart, etc. 81

COROLLAIRE. Le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, est un rapport arithmétique

<i>composé du diamètre lui-même, de sa moitié et de son quart,</i>	84
THEOREME IV. <i>Toute diagonale d'un quarré comparée géométriquement avec son côté, et tout côté avec sa diagonale, est incommensurable; comparées arithmétiquement, ces lignes sont commensurables,</i>	85
PROBLEME PREMIER. <i>Trouver le rapport du quarré d'un cercle au quarré inscrit dans ce même cercle, et au quarré qui lui est circonscrit,</i>	88
PROBLEME II. <i>Trouver par une même ligne quatre fois le quarré égal en surface à un cercle donné,</i>	91
PROBLEME III. <i>Trouver les quatre quarts de la circonférence du cercle, qui est égal en surface à un quarré donné,</i>	98
COROLLAIRE,	101
PROBLEME de la quadrature du cercle. <i>Moyen qui m'a conduit à la découverte de ce fameux Problème.</i>	104
PROBLEME. <i>Trouver la ligne dont le quarré est égal à la surface d'un cercle donné,</i>	109
<i>Solution géométrique de la quadrature du cercle fondée sur un triangle équilatéral formé par le rayon du cercle,</i>	ibid.
<i>Remarque. Seul obstacle qui a empêché tous les sçavans de parvenir à la solution de ce grand problème,</i>	118
PROBLEME I. <i>Quadrature de la portion du cercle renfermée dans un arc de 90 degrés,</i>	121
THEOREME 1^{er}. <i>Découverte d'une quatrième proportionnelle ajoutée au quarré de l'hypothénuse.</i>	122
PROBLEME VIII, <i>et l'un des plus beaux de la Géométrie.</i> <i>Trouver par une méthode aussi simple que facile, autant de cubes que l'on veut, etc.</i>	169
<i>Lettre et réflexions sur l'aurore boréale, du 30 Vendémiaire, que j'ai observée à Paris.</i>	173
<i>Avertissement de l'auteur.</i>	I

De la trisection de l'angle.

L'angle est un certain espace compris entre deux lignes qui partent d'un même point, en s'éloignant toujours l'une de l'autre. Ainsi c'est l'ouverture de ces deux lignes, qui, étant plus ou moins grande, détermine la grandeur de l'angle. On conçoit donc qu'un angle devient d'autant plus grand, que les deux lignes qui partent du même point, vont toujours en s'éloignant de plus en plus l'une de l'autre; et nécessairement l'angle s'augmente et ne cesse de s'accroître, jusqu'à ce que le point que nous appelons en géométrie, *sommet*, se trouve situé immédiatement entre les deux lignes faisant une seule ligne droite. L'on conçoit au contraire qu'un angle devient d'autant plus petit, que les deux lignes se rapprochent l'une de l'autre, et qu'il doit diminuer insensiblement jusqu'à ce que les deux lignes qui formoient l'angle, se soient réunies et confondues dans une seule et même ligne directe au point de leur *sommet*. De là, il suit qu'un angle ne peut avoir pour mesure la demi-circonférence entière d'un cercle. Car, c'est l'arc compris entre les côtés de l'angle qui en fixe la mesure.

On a agité parmi les géomètres une question; c'est de savoir si l'angle étoit une quantité qui put se diviser. Dans cette question qui est frivole et inutile, si l'on considère simplement l'angle par rapport à son *sommet*, c'est-à-dire, au

180 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

point où il se forme, je dis que ce point est indivisible, par ce qu'il est un point élémentaire de la circonférence du cercle, puisqu'il est certain que tous les triangles ne sont réellement que les différentes sections du cercle, ainsi qu'il est prouvé dans la *stéréométrie*. Car, tout triangle peut être inscrit dans un cercle; et alors ses trois angles auront pour *sommet* le point même élémentaire de la circonférence, avec lequel il se trouvera confondu, sans pouvoir en être distinct. Mais comme c'est l'ouverture des deux lignes qui forme l'angle, n'est-il pas évident que l'espace compris entre ces deux lignes peut se couper et se diviser? il étoit donc inutile de faire une pareille question.

D'après ces notions simples et claires, je demande s'il est possible que des hommes instruits, distingués dans les sciences, aient véritablement regardé jusqu'à ce jour, comme impossible, le problème de la *trisection de l'angle* ainsi que celui de la *quadrature du cercle*? puisque nous avons une méthode géométrique pour couper une ligne en deux parties égales; on devoit croire qu'il y en avoit aussi une pour la couper en quatre. Or, un angle ne peut être coupé en son quart, ni dans ses quatre parties égales d'une manière géométrique, sans qu'un autre angle ne puisse être pareillement coupé en son tiers et dans ses trois parties égales. C'est ce qui établit l'union de la *quadrature* avec la *trisection*, et qui les rend inséparables, parce que la solution de ces deux

DU CERCLE ET DU QUARRÉ. 131
problèmes se trouve également fondée sur l'union du triangle équilatéral avec le quadrilatère.

PROBLÈME DEUXIÈME.

Couper en trois parties égales un angle, ou l'arc qui en est la mesure.

SOLUTION.

Soit l'angle icz , figure 28, qu'il faut couper en trois parties égales, ainsi que l'arc ifz , lequel en est la mesure. Il s'agit donc de trouver une troisième portion de l'angle icz , dont la troisième portion de l'arc ifz sera la mesure. Nous nous servirons ici de la méthode géométrique que nous avons déjà employée dans la figure 26, afin de démontrer tout d'un coup et en même temps que la solution de ce problème est nécessairement le résultat de la solution de celui de la quadrature du cercle. C'est pourquoi, après avoir décrit le cercle a dont le rayon égale les côtés de l'angle icz , et le cercle excentrique c qui lui est égal, après avoir construit le triangle équilatéral abc , et formé le parallélogramme obliqu'angle $aclr$, comme l'on voit dans la figure 26, vous prolongerez ses côtés lc et ra parallèlement jusqu'aux points f et m . Alors, en tirant la ligne mf , vous aurez un autre parallélogramme obliqu'angle entièrement égal au premier. Prolongez aussi l'autre bout de ces deux mêmes côtés lc et ra , jusqu'aux points h et n ; vous aurez trois parallélogrammes égaux, en tirant la ligne hn .

132 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

Ensuite, du point z , vous tirerez la ligne zn qui passe par les points e et x en coupant trois côtés des parallélogrammes, au quart, à la moitié et aux trois quarts de leur ligne. Et du point i vous tirerez la ligne in qui passera par les points c et p .

Enfin du point e comme centre, décrivez le cercle excentrique, $zfi p r$, dont l'arc ifz qui est la mesure de l'angle e , fait nécessairement partie.

Or, je dis que l'arc px est la troisième portion de l'arc ifz , et que l'angle $pe x$ est le tiers de l'angle iez . Voilà la démonstration géométrique. Tirez la ligne ep , et vous aurez les deux triangles npe , iep , qui sont isocèles. Donc $eip = ipe$, et $nep = enp$. Mais l'angle ipe est extérieur, et par conséquent égal aux deux intérieurs enp et nep . Donc l'angle eip égale aussi ces deux mêmes angles. Donc il est le double de l'un et de l'autre. Mais l'angle icz extérieur, se trouve aussi nécessairement égal aux deux intérieurs enp , (ou à son égal $pe x$) et à l'autre angle eip . Donc l'angle iez est le triple de $pe x$, puisque celui-ci est la moitié de eip . Donc $pe x$ est réellement le tiers de l'angle iez , ce qu'il falloit prouver. En faisant la même opération sur l'autre angle mab qui égale iez , on aura encore la trisection de cet angle. Enfin on aura dans la même opération géométrique une troisième trisection de l'angle; car, il est évident que l'arc $p x r$ fait la troisième portion de l'arc entier izq . Voilà donc la véritable trisection.

Observation importante.

Il suit de cette démonstration que c'est le parallélogramme obliqu'angle réuni au triangle équilatéral qui conduit également à la solution du problème de la *trisection* et de celui de la *quadrature*. Ces deux problèmes se trouvent liés ensemble d'une manière inséparable. Il est bien facile de voir, en jettant les yeux sur les figures 26 et 28, qu'elles sont les mêmes, et que la solution des deux problèmes dépend du concours simultané du triangle et du quarré; et qu'il arrive nécessairement que c'est la division du quarré qui donne le *tiers*, comme c'est la division du triangle qui donne le *quart*. Rien ne paroît plus aisé à présent, parcequ'on connoît le moyen d'y parvenir. Cependant quand on considère que depuis deux mille ans, les hommes les plus savans se sont efforcés, à l'envie, de résoudre ce beau problème, sans jamais avoir pu y réussir; il est raisonnable de croire que la solution en étoit très difficile, puisqu'en effet elle tient nécessairement à la découverte de la quadrature du cercle. *Impossibilia dum ignores, ubi cognoveris facilia*. Les savans eux-mêmes la regardoient comme une chose impossible. Je m'étendrai davantage sur ce beau problème, en donnant la solution du problème général pour couper l'arc en toutes sortes de parties; et alors le géomètre pourra construire des polygones réguliers de sept côtés, de neuf, etc.; ce qu'on n'avoit pu exécuter jusqu'à présent par une méthode géométrique. Aujourd'hui la circonférence du cercle peut se diviser géomé-

triement. Ce n'est donc pas sans raison que j'ai donné à mon ouvrage un titre qui répond à la grandeur du sujet qu'il contient. Soyons de bonne foi ; avouons qu'on a toujours parlé dans le monde de la *quadrature du cercle* comme d'une chose entièrement inconnue, dont on ne prévoyoit pas les avantages précieux qui devoient en résulter, et qui vont se développer de plus en plus. (Mon projet étoit de donner en même temps, ici, *le Problème des Longitudes*, qui n'est encore qu'une suite nécessaire de la *quadrature du cercle*, ainsi qu'on le verra. Mais je n'ai pu finir pour ce jour mon ouvrage. La solution de ce grand problème sera la plus utile à la navigation, parce qu'elle déterminera strictement, la *longitude en mer*.)

Cependant il faut convenir qu'il y a eu des hommes savans qui ont connus toute l'importance de la découverte de la *quadrature du cercle*. M. De Méley, ami particulier des sciences, étoit bien pénétré de cette vérité, puisqu'il a *légué par un testament authentique, souscrit par sa famille, la somme de cinquante mille écus, en faveur de celui qui auroit le bonheur de faire cette découverte, d'après le jugement de l'Académie*. En recevant ce dépôt des mains du testateur, l'Académie s'est déclarée, aux yeux du public, seul juge sur ce sujet. Elle ne peut donc s'empêcher de prononcer aujourd'hui sur cet ouvrage. C'est un devoir que la justice lui commande, et que la foi publique lui prescrit. La gloire de la nation s'y intéresse particulièrement, et exige qu'elle

le se hâte de remplir l'obligation qu'elle a contracté, en accordant la récompense promise à celui dont le travail a été incroyable. Que de peines, que de veilles, il lui a fallu pour découvrir seulement le rapport de la circonférence au diamètre !

Extrait du journal d'Indications, d'Annonces, etc., de la rue d'Argenteuil, du 18 Brumaire de l'an 13,

AU RÉDACTEUR,

Monsieur, le titre de mon ouvrage que vous avez eu la bonté d'annoncer dans votre journal, a pu paroître à plusieurs personnes un peu trop fastueux ; cependant, je ne crains point de le dire ; il n'est que l'expression de la vérité. D'ailleurs, il faut bien pardonner quelque chose à celui qui, après avoir travaillé constamment pendant neuf années entières, s'est livré à la joie d'avoir fait une découverte qu'isera utile aux hommes, et qui honorera sa patrie. Oui, *cette nouvelle découverte embrasse toute la géométrie*, puisqu'elle nous développe entièrement le mécanisme du cercle et du quarré ; puisqu'avec le *cercle* seul je puis démontrer toutes les parties de la géométrie, depuis les cônes ou pyramides jusqu'à la simple ligne : puisque la quadrature du cercle nous fait connoître celle de l'ellipse, et la véritable surface de toutes les sphères. Oui, *cette découverte nouvelle donne la solution des plus grands problèmes de la géométrie* ; car vous observerez en premier lieu que la solution du *pro*

136 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE, etc.

blème de la quadrature du cercle se trouve liée d'une manière inséparable avec celle de la trisection de l'angle. Ces deux problèmes, si fameux dans l'antiquité, se tiennent naturellement l'un à l'autre dans ma démonstration, figure 26, parce qu'ils dépendent du même point mathématique qu'il falloit trouver, et parce qu'ils sont un même résultat de l'union du quarré et du triangle. *Le double nœud du cube va se délier, et la quadrature des arcs et des secteurs du cercle mettra le sceau à l'une des plus belles découvertes de l'esprit humain.* Cela ne doit point vous étonner; *nous sommes dans un tems de prodiges*, comme nous l'a dit le savant ministre Portalis. Afin de vous donner sur-le-champ une preuve de ce que j'avance, je vous prie d'annoncer au public que l'on trouve avec la brochure un Tableau démonstratif de la solution simultanée des problèmes mentionnés ci-dessus, lequel Tableau sera mis à la tête du livre. Il n'y a donc aucun doute à former sur la réalité de cette grande découverte. L'auteur espère que les membres de l'Académie écouteront la voix de la justice et de l'humanité, s'intéresseront auprès de l'Empereur, protecteur des sciences, pour obtenir la récompense due aux travaux de celui qui, dépouillé de tous ses biens par la révolution, ne jouit d'aucun revenu.

J'ai l'honneur d'être votre serviteur.

LAURENT POTIER DES LAURIÈRES.

Paris, le 12 Brumaire an 13.

J'ai promis de donner une plus grande étendue à la solution du beau problème de la trisection de l'angle, en donnant le problème général pour la trisection de toutes sortes d'angles. Je tiens ma parole.

PROBLÈME TROISIÈME ET GÉNÉRAL
pour la trisection de tous les angles.

Couper en même temps au tiers, et aux deux tiers toutes sortes d'angles et d'arcs qui en sont la mesure.

Comme la solution de ce *problème général de la trisection des angles*, se trouve entièrement fondée sur celle du dernier problème que j'ai donné, et lequel est particulier à la trisection de l'angle de la *quadrature du cercle*, et comme la méthode géométrique pour parvenir à cette solution n'est point distincte de celle que j'ai employé dans la *quadrature du cercle*, il semble que je devrois y renvoyer le lecteur; mais, afin de ne point fatiguer son esprit par ces différentes recherches, je pense qu'il vaut mieux rassembler ici, sous ses yeux, toutes les preuves résolutives de ce beau problème, qui est peut-être le plus admirable de tous les problèmes de la géométrie, après celui de la *quadrature*.

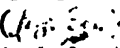
S O L U T I O N.

Première Partie. Soit* l'angle $i e q$; soit l'arc $i q$, (*fig. 29*), qu'il faut couper au tiers

L

138 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE.

et aux deux tiers. Il s'agit donc de trouver une troisième portion de cet angle proposé, et une troisième portion de cet arc qui en est la mesure, et de trouver en même temps les deux tiers de l'un et de l'autre.

Commencez d'abord par décrire la circonférence d'un cercle dont le rayon sera égal aux côtés de l'angle proposé, et dont le centre sera le point a .  Formez ensuite un triangle équilatéral dont les côtés égaleront le rayon de votre cercle, de manière que le sommet de l'un de ses angles se trouve placé au centre a , et que les deux autres aboutissent conséquemment à la circonférence, comme abc . Du point c , décrivez un autre cercle semblable au cercle a , et dont le centre sera e , et du point e qui est le milieu du rayon, décrivez encore un autre cercle semblable, dont le centre sera a . Sur la ligne cea , tirez un quadrilatère dont les côtés seront égaux et parallèles à cea , en suivant la méthode prescrite dans la solution de la quadrature du cercle, page 110; par ce moyen vous aurez le parallélogramme obliqu'angle $aclr$. Prolongez les côtés lc et ra de part et d'autre, toujours parallèlement, ensorte que vous ayez trois parallélogrammes tout-à-fait semblables, en tirant hn , lr , ca , fm , lesquelles lignes vous diviserez en quatre parties égales. Enfin, prolongez la ligne mf jus-

qu'au point o ; et de ce même point o tirez la ligne on , qui passera par les points c et p ; et du point opposé m , tirez la ligne mn qui passera par les points a et r , lesquelles deux lignes seront égales et iront se réunir au même point n , en formant l'angle n .

Cela posé, d'après cette construction, qui est précisément la même que celle de la *quadrature du cercle*, si du point e , centre du cercle médiaire, vous tirez les deux rayons ei et eq ; si du point e , vous tirez les deux rayons ep , er ; et si du point z vous tirez la ligne zn perpendiculaire à la ligne om ; je dis 1°. que l'angle pnx sera le tiers, et l'angle $cp e$ sera les deux tiers de l'angle iez , qui est la moitié de l'angle ieq . Je dis 2°. que, si du point p vous décrivez le cercle dont la circonférence passe par les points c et n , l'arc cp sera les deux tiers et l'arc px sera le tiers de l'arc iz , moitié de izq . Or, j'ai déjà démontré évidemment, dans la solution du précédent problème de la trisection, que l'angle ipe , ou epi , étant extérieur, égalait les deux intérieurs enp , nep ; et qu'il étoit par conséquent le double de l'un et de l'autre. L'angle iez , étant aussi extérieur, se trouve nécessairement égal aux deux intérieurs enp (ou à son égal nep) et à l'autre angle eip . Donc l'angle iez est le triple de pex , ou de son égal enp . Donc enp est le tiers, et

ipe , ou eip , est les deux tiers de l'angle iez . Donc l'arc px est le tiers, et l'arc ce est les deux tiers de l'arc iz . En faisant la même démonstration géométrique sur l'autre moitié de l'arc zq et de son angle zeq , il est évident qu'on aura le même résultat : donc l'angle ieq et l'arc izq , qui en est la mesure, sont coupés au tiers et aux deux tiers, etc.

Seconde partie de la Solution.

(D'abord, remarquez attentivement que l'arc sur lequel je viens d'opérer, est l'arc fondamental dont la tri-trisection sert à déterminer celle de tous les autres arcs, et par conséquent celle de tous les angles). La preuve en est évidente; car les arcs que l'on veut couper en trois parties égales, ainsi que leurs angles, sont ou plus petits ou plus grands que cet arc fondamental et que l'angle dont il est la mesure. Or, dans ces deux hypothèses, c'est toujours cet arc de *la quadrature* qui lui seul détermine la trisection, de tous les autres arcs et de leurs angles.

1°. Dans la première hypothèse, voici la méthode géométrique qu'il vous faut suivre: soit l'arc, HG , soit l'angle, $H e G$, (*fig. 30*), dont il faut trouver le tiers et les deux tiers. Du point i , tirez la corde iI , qui passera par le point r ; et du point q , qui est l'autre bout de l'arc fondamental, tirez la corde qQ , qui

passera par le point p . Ces deux cordes se couperont au point y , et formeront par ce moyen deux angles opposés au sommet, dont l'un embrassera dans ses côtés l'arc $i q$, et l'autre comprendra l'arc $p r$ qui est le tiers du précédent. Pour trouver maintenant le tiers de votre arc, $H G$, l'ayant divisé en deux parties égales au point z , tirez du point H la ligne $H h$ qui passera par le point d'intersection y ; et du point G , qui est l'autre extrémité de votre arc, tirez la corde $G g$, en passant par le point d'intersection y . Or, je dis que l'arc $D D$ ou $d d$, est la troisième portion de l'arc proposé $H G$. En effet, pour vous faire bien comprendre cette vérité, du point E également éloigné du point d'intersection y , comme le point e en est distant, après avoir pris la grandeur du rayon $e z$, décrivez la circonférence du cercle qui passe par les points $I R P Q$; et du point d'intersection y , en conservant la même ouverture du compas, décrivez la circonférence d'un autre cercle qui passera par les points $u U$ et $v V$. D'après cette opération, il est facile de concevoir que les arcs $I Q$, $U V$, et $p r$ sont entièrement égaux à chacun des trois autres arcs opposés auxquels ils correspondent, puisqu'ils sont les mêmes portions d'un même cercle qui se trouvent chacune comprises entre les côtés des deux angles égaux $Q y I$ et

gyi, lesquels angles sont opposés au sommet. Or, si on suppose que la ligne zN est suspendue à son centre y , comme sur un piveau et roule en parcourant tous les points de l'arc IQ ; cette même ligne parcourera également tous les points des autres arcs, ensorte que, si elle coupe aux points gh , l'arc IQ à son quart; les autres arcs se trouveront pareillement coupés chacun à leur quart par la même ligne; car il est évident que toutes ces portions de cercles seront divisées en parties proportionnelles. Mais nous avons déjà démontré que l'arc pr étoit le tiers de l'arc IQ ; son quart se trouvera donc nécessairement le tiers du quart de l'arc IQ : et comme l'arc UV , se trouve situé à égale distance de l'arc IQ et de l'arc pr qui en est le tiers; cet arc médiaire, portion d'un même cercle, comprise entre les côtés d'un même angle, est nécessairement le double de l'arc pr et fait par conséquent les deux tiers de l'arc IQ , donc l'arc dd ou DD , fera le tiers de votre arc HG , que vous voulez couper en trois parties égales; et l'arc kl en sera les deux tiers.

Voulez-vous encore une autre preuve de cette même vérité géométrique? du point d , l'un des bouts de l'arc dd , que je dis être le tiers de votre arc HG , décrivez la circonférence d'un cercle qui passe par les points $e m$,

(fig. 31); et du point H , l'une des extrémités de votre arc, tirez la ligne Hm , qui passera par le point d , et de ce point d , tirez la ligne de ; enfin de ce point e tirez la ligne eH . Alors, en faisant la même résolution que nous avons déjà fait ci-dessus, on verra avec évidence que l'angle dme est le tiers, et l'angle Hde , est les deux tiers de l'angle Hez ; donc dd est le tiers de l'arc entier HG proposé. Il en est ainsi de tous les autres arcs dont on voudra faire la trisection.

2°. Dans la seconde hypothèse, c'est-à-dire, dans le cas que l'arc dont on veut faire la trisection soit plus grand que l'arc fondamental iq ; voici la méthode qu'il faut suivre: on observera premièrement que l'arc fondamental iq suffit, lui seul, pour donner la trisection de tous les autres arcs, quels qu'ils soient, car on est toujours obligé de séparer en deux parties égales l'arc ou l'angle dont on veut avoir le tiers, ainsi qu'il arrive par la ligne zn , et l'on opère sur une moitié. Or, si l'arc que l'on veut couper en trois parties égales est plus grand que l'arc fondamental iq , alors il ne s'agit que d'en prendre la moitié ou le quart, et d'opérer sur cette moitié d'arc ou sur son quart, après l'avoir divisé en deux par la ligne zn . Le tiers ou les deux tiers qui résulteront de l'opération, étant doublé, vous donnera bientôt la troisième portion de l'arc entier

dont vous voulez avoir la trisection ; mais je vais donner un autre moyen géométrique qui nous conduira à la même fin.

Soit l'arc ac , (*fig. 32*), que je veux couper en trois parties égales ; je commence par diviser également l'arc en deux ; ensuite je prends l'excédent de sa moitié , sur l'arc fondamental ~~$i q$~~ de la trisection, et je cherche le tiers de cette portion excédente de l'arc par la méthode qui vient d'être enseignée. Ce tiers trouvé est al , que je transpose au-dessus de la moitié de l'arc fondamental zL , en laissant à la fin de l'arc $i q$ les deux autres tiers de l'excédent ; ensorte que la moitié de votre arc sera lL ; et l'arc en entier sera lLc . Il s'agit donc de couper ce grand arc en trois parties égales. Du point p , comme d'un centre , décrivez la circonférence d'un cercle qui passera par les points en ; ensuite du point C , l'une des extrémités de votre arc , tirez la ligne Cf qui passera par le point p ; et de ce point f , tirez la ligne fL , qui passera par le point e , en coupant l'arc pr au point r . Or , je dis que pr est le tiers de l'arc CL . Pour vous en convaincre , du point p tirez la ligne pe , et de ce point e tirez la ligne eC , vous avez deux triangles isocèles fpe et pec ; il est évident que l'angle extérieur Cpe est le double de l'angle intérieur pfe , et que l'angle CEL en est le triple. Donc l'angle pfe , est le tiers de

de L ; donc l'arc pr , qui en est la mesure , fait le tiers de l'arc LC . La même opération faite sur l'autre moitié de l'arc Ll , vous donnera le même résultat ; car il faut bien observer que la ligne fl est égale à fC et qu'elles sont les deux côtés de l'angle Cfl . Donc, etc.

On ne saisit pas tout d'un coup la raison géométrique qui nous oblige de partager d'abord , en trois tiers , sur la moitié de l'arc fondamental , l'excédent de la moitié des grands arcs dont on veut avoir la trisection, et d'en transporter ensuite un tiers au-dessus du point z , c'est-à-dire , au-dessus de la moitié de l'arc fondamental. Je vais vous la faire connoître ; c'est afin de conserver dans l'opération la proportion existante entre le point p qui détermine l'arc du tiers et entre le point z ; ensorte que par cette transposition du tiers dudit excédent, on rend nécessairement les deux côtés de l'angle toujours égaux , ainsi qu'il appert dans la *fig. 32*. $fl = fC$ qui passe par le point p , et la ligne fL représente la ligne zn de l'arc fondamental ; autrement la ligne fC ne passeroit plus au point p , et f ne correspondroit plus au point L en passant par le point e .

COROLLAIRE.

Il suit de la solution et de la démonstration de ce problème : 1°. Que la trisection des an-

gles ne peut s'opérer que sur l'arc fondamental que nous avons établi, et dont le tiers a pour *sinus* le quart du diamètre, ou plutôt, sur la moitié de ce même arc dont le tiers a pour *sinus* le quart du rayon. Car, il faut bien se souvenir qu'afin de parvenir à la trisection d'un angle ou d'un arc, on doit toujours commencer par le diviser en deux parties égales, lesquelles parties sont séparées par la ligne zn , figures 29 et 30; ainsi, comme je l'ai dit, c'est le quart qui produit le tiers. 2°. Il suit de cette solution que le problème de la *quadrature du cercle* et celui de la *trisection* demeurent liés ensemble d'une manière inséparable. En voici la preuve: l'arc fondamental que nous avons établi pour opérer la trisection des arcs et des angles, est précisément l'arc qui accompagne la solution de la *quadrature* de tous les cercles. Or, sans cet arc fondamental et sans son angle, il est impossible de trouver le moyen de couper aucun arc ou aucun angle en trois parties égales. Donc la *trisection* des arcs est liée essentiellement avec la *quadrature* des cercles. Voici encore une autre preuve de cette même vérité géométrique. Ces deux problèmes sont liés ensemble essentiellement, si leur solution dépend d'un même point mathématique. Or, ils ont tous les deux un même point décisif de leur solution; car dans la *quadrature du cercle*, c'est le point e , centre du cercle mé-

diaire, qui détermine le passage de la ligne qui nous conduit à la solution de la *quadrature du cercle*; et dans la *trisection*, ce même point *e*, centre du cercle médiaire, détermine le passage de la ligne qui nous conduit à la solution de la *trisection de l'angle et de l'arc* qui en est la mesure. Donc, ces deux problèmes sont intimement liés ensemble d'une manière géométrique. Il n'est donc plus étonnant d'appréhender que les Savans de tous les siècles passés n'aient jamais pu parvenir géométriquement à la *trisection de l'angle*, puisqu'ils n'avoient point la solution de la *quadrature du cercle*. 3°. Il suit de la solution de ce problème, que l'on a un moyen sûr pour couper l'arc et son angle en toutes sortes de parties; car il ne s'agit pour cela que de trouver sur la ligne *z n* le rayon des différens arcs, dont les parties proportionnelles et correspondantes à celles du tiers, donneront la *quarti-section*, la *quinti-section*, etc. de l'arc fondamental ou de l'arc proposé. Observez que cette ligne médiane *z n*, est comme le piveau sur lequel roulent tous les cercles dont les centres éloignés proportionnellement les uns des autres, forment les différens arcs qui se trouvent coupés en la troisième, quatrième, cinquième ou septième partie proportionnelle, etc. de l'arc fondamental de la trisection. Enfin, l'on comprend que le tiers de l'arc *p r* est la neuvième

148 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

partie de l'arc iq , et que le quart de pr est conséquemment la douzième partie de l'arc iq , etc.

OBSERVATION.

Comme l'arc fondamental de la *trisection de l'angle* accompagne la *quadrature du cercle*; de même la *circulature du quarré* se trouve aussi accompagnée d'un arc fondamental pour la trisection de tous les arcs et de tous les angles. On va voir que cette autre solution du beau problème de la trisection se trouve fondée sur la même méthode que j'ai déjà enseignée. Mais celle-ci mérite une attention particulière, à cause des grands avantages qu'elle nous procurera dans la suite; d'ailleurs elle paraîtra beaucoup plus facile pour la construction de la figure géométrique.

PROBLEME QUATRIEME ET REMARQUABLE.

Donner une ligne à volonté, et trouver par le moyen de cette ligne l'arc fondamental de la trisection pour tous les arcs et pour tous les angles.

SOLUTION.

Première Partie de la solution. Soit la ligne ab , donnée à volonté (*fig. 33*); il s'agit donc par le moyen de cette simple ligne de trouver l'arc fondamental de la trisection pour tous les arcs et leurs angles. Du milieu de votre ligne, au point e , décrivez la demi-circon-

férence ab , et du point b , décrivez, en conservant la même ouverture du compas, la demie-circonférence er ; ensuite du point q qui coupe la demie-circonférence ab en deux parties égales, tirez la ligne aq ; et de ce même point q , comme centre, décrivez le cercle dont la circonférence passe par les points a et b qui sont les deux extrémités de la ligne donnée, en sorte que cette ligne deviendra le côté du quarré inscrit $abxt$; aq sera le rayon de ce cercle, et par conséquent la moitié de la diagonale du quarré inscrit. Sur le demi cercle er , menez la ligne $ag = aq$, vous aurez le triangle izocèle qag . Mais si du point a , vous tirez la perpendiculaire ah , elle coupera l'angle a en deux parties égales; et si des deux points g et q , vous tirez les deux lignes gh et qh , vous aurez quatre triangles semblables et entièrement égaux entr'eux. Or, si du point h , comme centre, vous décrivez le cercle dont la circonférence passe par les points qgm ; je dis que l'arc qg est le tiers de l'arc pm , et que l'arc xv en est les deux tiers.

Pour démontrer cette vérité, il ne s'agit que de prolonger les lignes aq jusqu'au point p passant par le point x , ah jusqu'au point r , et ag jusqu'au point m passant par le point v qui est également distant du centre h que le point x . Tirez encore les deux rayons hm

150 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE.

et $h p$. Alors, vous verrez évidemment que l'angle $h q p$, étant à l'égard extérieur des deux angles $h a q$, $a h q$, se trouve nécessairement égal à ces deux angles, et qu'il est par conséquent le double de l'un ou de l'autre, et que l'angle $p h r$, étant extérieur à l'égard des deux angles intérieurs $h a p$ et $h p a$, se trouve égal à ces deux angles. Or, $h p a$ est le double de $h a p$; donc l'angle $p h r$ en est le triple, donc l'arc $q l$ est le tiers, et l'arc $x h$ est les deux tiers de l'arc $p r$. Faites la même opération géométrique sur l'autre moitié de l'arc $r m$, vous aurez nécessairement un même résultat; puisqu'il est évident que la ligne $a r$ passant par le centre h , coupe ces trois arcs en parties proportionnelles. Donc, etc.

Seconde partie de la solution. Il s'agit à présent d'avoir un arc double de l'arc $p m$, et d'en faire la trisection géométrique. Cet arc double sera $i m n$, (*même fig.*). Du point v , comme centre, décrivez le cercle dont la circonférence passe par les points $q f n m i$, et du point n tirez la ligne $a f n$. Or, je dis que l'arc $q f$, est le tiers, et l'arc $x u$ est les deux tiers de cet arc $i m n$. Pour vous en convaincre, observez d'abord que la ligne $a g v m$ coupe en deux parties égales chacun de ces trois arcs. Prenez donc une moitié sur laquelle vous commencerez à opérer comme nous avons fait ci-dessus. Du point q tirez la

ligne $q v$, et du point v tirez la ligne $v i$; vous aurez trois triangles isocèles, $a q v$, $q v i$, $i v m$. Car leurs côtés sont nécessairement égaux, puisqu'ils sont les rayons de deux cercles égaux. Or, en faisant la même résolution de ces trois triangles, comme nous avons déjà fait, on verra avec évidence que l'angle i ou l'angle $v q i$ son égal est le double de l'angle a , et que l'angle $i v m$ est égal à ces deux angles pris ensemble à l'égard desquels il se trouve extérieur. Donc l'arc $q g$ mesure de l'angle a ou $q k$ est le tiers, et l'arc $x v$ mesure de l'angle q est les deux tiers de l'arc $i m$. Répétez la même opération sur l'autre moitié de l'arc $m n$, et vous aurez un même résultat. Donc l'arc entier $q f$ est le tiers, et l'arc entier $x u$ est les deux tiers de l'arc entier $i m n$. Donc, etc.

Il vous sera facile d'augmenter, à votre gré, l'arc fondamental de la trisection que je viens d'établir, $p r m$, (des deux tiers par exemple) sur la même circonférence du cercle dont h est le centre. Comme la grandeur d'un angle ne dépend point de la grandeur de ses côtés, il faut supposer l'angle dont vous voulez avoir la trisection, placé au centre de votre cercle h ; et conséquemment l'arc qui en sera la mesure, se trouvera appliqué sur votre arc fondamental de la trisection. Ainsi vous aurez la trisection de tous les arcs et de tous les angles que vous désirerez, en suivant la méthode que

nous avons enseigné , et en commençant d'abord par diviser en deux parties égales l'arc et l'angle que vous voulez couper géométriquement en trois parties égales. Observez la construction de la figure 36 , par laquelle les différentes portions des arcs du tiers et des deux tiers se trouvent proportionnelles aux portions correspondantes de l'arc FONDAMENTAL DE LA TRISECTION.

En présentant cet ouvrage aux premières autorités constituées de l'Empire , quelques personnes en place ont paru fort curieuses de voir comment la découverte de la quadrature du cercle pouvait m'avoir conduit à celle du fameux problème de la duplication du cube. Je vais les satisfaire.

De la duplication du cube.

On appelle en physique , *cube* , tout corps solide qui présente six faces égales et quarrées. Tels sont , par exemple , les dez à jouer. On appelle en arithmétique , *nombre cubique* , le produit du quarré multiplié par sa racine. Ainsi le quarré du nombre 2 = 4 , et $4 \times 2 = 8$; ce dernier nombre , 8 , est donc le cube de 2.

Ce problème remonte jusques dans la plus haute antiquité des temps. On en peut juger par l'origine qu'on lui attribue le plus généralement , et qui paraît être fabuleuse. Les

auteurs anciens rapportent que la ville d'Athènes était désolée par la peste. L'oracle d'Appollon fut consulté à Delphes sur le moyen de faire cesser les ravages de ce terrible fléau. Il répondit qu'il fallait doubler l'autel qui était dédié à Appollon, et dont la forme était entièrement *cubique*. Tous les savans de la Grèce ne purent trouver la solution géométrique de ce problème. Celle que donna Platon est mécanique. Les mathématiciens modernes ont fait pareillement tous leurs efforts, afin de le résoudre géométriquement ; mais jusqu'à ce jour toutes leurs tentatives sont demeurées inutiles. Sa découverte dépendait de la *quadrature* du cercle. Ce problème consiste à trouver, par une méthode géométrique et sans aucun tâtonnement, le côté du *cube* double que l'on cherche. Il faut bien observer que ce côté pour cela ne doit pas avoir la hauteur double de celle du côté d'un autre *cube*. Car dans ce cas, ce cube ne serait pas seulement doublé, mais il se trouverait huit fois plus grand que celui avec lequel on le comparerait. En effet, dans cette hypothèse, si le côté du cube que l'on a trouvé, avait 4 de hauteur, l'autre conséquemment aurait 2. Leurs solidités seraient entr'elles comme les cubes de ces deux nombres, c'est-à-dire, comme 64 est à 8. Pour parvenir à la solution géométrique de ce problème, il s'agit de trouver

154 IDENTITÉ GÉOMÉTRIQUE

deux moyennes proportionnelles entre la hauteur du côté du premier cube et une autre ligne double de cette hauteur. Jusqu'à présent les savans n'ont point découvert le moyen géométrique d'avoir deux moyennes proportionnelles entre deux lignes données. Voici d'abord ce PROBLEME.

PROBLÈME CINQUIÈME ET FONDAMENTAL.

Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux lignes.

SOLUTION.

1^o. Soit la ligne ge , soit la ligne gf , *fig. 34*, il s'agit de trouver entre ces deux lignes deux moyennes proportionnelles. Après avoir décrit la circonférence du cercle a , vous y placerez le triangle équilatéral abc , comme dans la *fig. 26*, de la solution géométrique de la *quadrature du cercle*. Du point c , et du point e , comme centres, décrivez la circonférence de deux cercles égaux au cercle a . Du sommêt de l'angle c , abaissez la perpendiculaire cr , et du point u , centre de cette ligne, tirez la ligne droite uf perpendiculairement à ca , et qui passera par le point g . Observez que les deux lignes de ce problème fondamental, gf et ge , se joignent, en formant un angle droit. Du point u , tirez la ligne um' égale à uc ; ensuite du point c , tirez la ligne cs ,

qui passe au point f , extrémité de la ligne fondamentale $g f$; et du point u , tirez la ligne $u t$ qui passe par le point e , extrémité de la ligne $g e$. Cela posé, vous avez les deux triangles $f c u$, $c u e$, qui sont rectangles en c et en u ; et vous avez les deux lignes $u g$, et $c g$ qui sont des perpendiculaires abaissées de l'angle droit u et de l'angle droit c sur l'hypothénuse. Donc vous avez ces deux proportions continues, $f g : c g :: c g, g u$. et, $c g u g :: u g : g e$. Donc, vous avez cette progression géométrique, $:: f g : g c : g u : g e$. Cette dernière conclusion est évidente, puisque vous avez cette proportion $g e^3 : g u^3 :: g e : g f$. Donc les deux perpendiculaires $g u$ et $g c$ sont deux moyennes proportionnelles continues entre les deux lignes $f g$ et $g e$. Ce qu'il fallait démontrer.

2°. Comme ce problème est le problème fondamental de la *duplication du cube*, je vais en donner la solution par nombres. Elle en rendra l'intelligence plus facile à ceux qui en sont les moins instruits. Soit la ligne $g f = 3,247,595$, etc. Soit la ligne $g e = .625$. Il s'agit de trouver entre ces deux lignes deux moyennes proportionnelles. Or, je viens de prouver que $g u$ et $g c$ étaient ces deux moyennes proportionnelles continues, dont l'une $= 1,082,531,7$, etc. et l'autre $= 1,875$. Car, vous avez cette progression géométrique ::

156 IDENTITÉ GEOMETRIQUE

3,247,595, etc. $= gf : 1,875 = gc : 1,082,531$,
 etc. $= gu : .625 = ge$. L'on a donc cette pro-
 portion géométrique, .244,140,6, etc. $= ge3 :$
 1,268,591, etc. $= gu3 : : .625 = ge : 3,247,595$,
 etc. $= gf$. Or, dans cette proportion des deux
 cubes avec les deux lignes; il est évident que
 le produit des moyens égale celui des extrê-
 mes, lequel forme de part et d'autre ce nom-
 bre, 792,869, etc. Donc, etc.

COROLLAIRE.

Il suit de la solution de ce problème que
 la ligne gf et la ligne gu , sont deux segmens
 de la perpendiculaire cr du triangle équila-
 téral, à laquelle ces deux lignes, réunies en-
 semble, se trouvent égales; et le point g est
 le point central qui sépare nécessairement la
 ligne fx en deux parties égales. Car, il est
 facile d'appercevoir que le perpendiculaire gc
 divise également le triangle isocèle fcx , et
 forme par cette division deux autres triangles
 qui sont entièrement semblables. Il est im-
 portant d'observer exactement le parallèle qui
 existe entre les deux lignes sc et ut . Car
 c'est ce parallèle qui forme le point décisif du
 problème de la *duplication du cube*; et c'est
 ainsi que la grande découverte de la *quadra-
 ture du cercle* nous met entre les mains la vé-
 ritable clef de toutes les autres découvertes.

PROBLEME

PROBLÈME SIXIÈME.

Trouver un cube double d'un autre cube donné.

SOLUTION.

Afin de parvenir à la solution géométrique de ce problème, il faut d'abord commencer par décrire le cercle dont le centre est a , *fig. 35*, et former le triangle équilatéral abc , comme je l'ai enseigné dans *la quadrature*, *fig. 26*. Du point c et du point e , comme centres, décrivez la circonférence de deux cercles égaux au cercle a . Du sommet de l'angle c , abaissez la perpendiculaire cr , qui partagera le triangle équilatéral en deux parties égales; et du milieu de cette ligne, au point u , tirez la droite ut , perpendiculairement à cr , laquelle passera par le point e ; et du point c , menez la parallèle cs , de manière que la première construction de cette figure se trouve entièrement semblable à celle de la *fig. 34* du problème fondamental qui précède.

Cela posé, soit gm , le côté du cube donné dont il s'agit de trouver un autre cube double; tirez la ligne gh qui soit double de la ligne gm , en sorte que ces deux lignes se joignant au point g , forment un angle droit. Du point h , tirez la diagonale hm , qui aboutira à l'extrémité de vos deux mêmes lignes; et du centre o , décrivez le cercle dont la cir-

conférence passera par les points $h g m$. Alors du point m , qui est l'extrémité de la ligne donnée $g m$; et du point h , qui est l'extrémité de l'autre ligne $g h$, tirez deux parallèles à la ligne $c s$ et à la ligne $u t$ qui sont les deux parallèles employées dans le problème fondamental; par ce moyen, vous aurez les deux autres parallèles $h H$, et $m M$. Du point o , prenez la perpendiculaire $z o$ qui marque la distance de vos deux parallèles $h H$ et $m M$ au centre o de la ligne $h m$. Tirez ensuite les deux cordes $m n$ et $h N$ qui soient égales à la ligne $z o$ que vous aurez prise. Après avoir prolongé d'une manière indéfinie la ligne $m g$ ainsi que votre autre ligne $h g$, vous tirerez les deux lignes $n m x$ et $h N l$, en conservant toujours entr'elles leur parallélisme. Tirez ensuite la ligne $l x$, vous aurez donc le parallélogramme $h l x n$ qui vous donnera la solution du problème que vous cherchez.

Mais afin de parvenir plus sûrement et plus facilement à la construction de ce parallélogramme, voici la méthode géométrique qu'il vous faut suivre. Dans le cercle o , tirez les deux lignes $h n$ et $N m$, vous aurez cet autre parallélogramme $m n h N$. Tirez la ligne $i I$ qui coupe en deux parties égales les deux côtés $h n$, $N m$ de ce parallélogramme, et qui passe par le point o . Ainsi $h g$ se trouvera coupé au point y , lequel sera le point central du

parallélogramme $h l x n$. Alors de ce point y ,
 décrivez le cercle qui passe par les quatre
 points $h l x n$, et dans lequel par conséquent
 se trouvera inscrit ce parallélogramme. Or,
 je dis que vous avez ces deux triangles $h l x$,
 $l x m$, qui sont rectangles en l et en x ; et
 que vous avez ces deux lignes $g l$ et $g x$, qui
 sont des perpendiculaires abaissées du som-
 met des angles droits l et x sur l'hypothénuse.
 Vous aurez donc ces deux proportions con-
 tinues, $h g : g l :: g l : g x$; et, $g l : g x ::$
 $g x : g m$. Donc, vous avez cette progrès-
 sion géométrique, $:: g m : g x : g l : g h$. Donc,
 $g m^3 : g x^3 :: g m : g h$. Or, $g h$ est le double
 de la ligne $g m$. Donc le cube dont le côté
 égale $g x$, est nécessairement le double du
 cube dont la hauteur ou le côté égale $g m$.
 Ce qu'il fallait démontrer.

COROLLAIRE,

*Dans lequel nous découvrons la cause de
 l'erreur géométrique commise par tous les savans,
 à l'égard des problèmes du 3^{me}. et 4^{me}. degré.*
 Il suit de la solution de ce problème que le
 point décisif de la difficulté qui a arrêté jus-
 qu'à présent les efforts de tous les géomètres
 depuis l'espace de plus de deux mille ans,
 consiste dans le point central o , même figure,
 de la diagonale qui aboutit à l'extrémité des
 deux lignes proposées, et dont il faut néces-
 sairement connaître la distance aux parallèles

que l'on mène de chaque extrémité des deux lignes données suivant la direction des parallèles fondamentales établies par le problème précédent ; et la ligne qui mesure cette distance , en devenant la corde d'une portion du cercle o , conduit à la solution que l'on cherche. On voit donc clairement dans ce problème de *la duplication du cube* comme dans celui de *la trisection de l'angle* , que leur solution ne peut être géométrique , ni devenir générale pour toutes les lignes données , sans y faire l'application de la règle particulière et fondamentale que nous avons énoncée dans la solution première de chacun de ces deux problèmes. Telle est la cause de l'erreur que tous les savans ont commise à l'égard de ces problèmes qui sont du troisième degré , en *affirmant positivement qu'il était impossible de résoudre cette sorte de problèmes géométriquement , c'est-à-dire , par le moyen du cercle et de la ligne droite seulement*. On comprendra mieux la vérité que nous avançons ici , par l'explication que nous allons en donner.

On appelle en géométrie , *équation*, la comparaison qui se fait entre deux ou plusieurs quantités égales. Cette comparaison d'égalité géométrique se fait , soit en ôtant , en ajoutant , soit en divisant , en multipliant , en substituant , etc. afin de parvenir d'une quantité connue à une quantité qui est inconnue. Car ,

s'il y en a plusieurs, il faut les réduire toutes à une seule. Or, cette inconnue peut être élevée à sa première puissance, ou à sa seconde, ou à sa troisième, etc. De-là, les équations sont de différens degrés, du premier, du second, du troisième, du quatrième, etc. Observez que toutes les opérations géométriques que l'on peut faire dans ces cas pour parvenir à la solution que l'on cherche, doivent être faites en allant toujours de conséquences en conséquences qui dérivent des antécédens vers le but qu'on se propose. Mais il est évident que, si l'on emploie dans une équation du troisième degré, (par exemple, dans celui de *la duplication du cube*), soit l'addition, la soustraction, soit la multiplication, la division ou la substitution, etc., on ne pourra jamais parvenir à connaître la règle particulière, qui sert de fondement à la solution générale de ce problème, parce que cette règle particulière n'a par elle-même aucun rapport direct ni indirect avec la méthode générale qu'il faut employer pour toutes les lignes dont on cherche le cube. Ainsi dans le problème fondamental de la duplication du cube, on ne peut jamais parvenir, par une équation, à la connaissance de la ligne proposée qui est un segment de la perpendiculaire cz , et dont l'autre segment est l'une des deux moyennes proportionnelles que l'on cherche. Il en est de

même de la trisection de l'angle. Car , après toutes les opérations et réductions que l'on peut faire , on parvient bien à connaître que le cube de l'inconnue est égal à trois fois elle-même, après en avoir retranché une grandeur connue ; mais on n'a rien dans les antécédens dont on puisse tirer une conséquence qui nous fasse découvrir la grandeur de l'inconnue que l'on cherche. Il faut donc , avant d'opérer , connaître la règle fondamentale que le géomètre éternel a établi lui-même , et en faire l'application dans toutes les autres circonstances. Il fallait donc conclure seulement qu'il était impossible de résoudre par la méthode des équations les problèmes du troisième et quatrième degré , et il ne fallait pas pousser plus loin la conséquence , en affirmant qu'il était impossible d'en avoir la solution géométrique. Cette dernière conclusion n'est point tirée des prémisses. Voilà donc la cause évidente de l'erreur de tous les géomètres. Le problème que nous allons donner, l'un des plus beaux et des plus utiles de la géométrie , fera sentir encore davantage la force de notre raisonnement. Je dis qu'il en est de même à l'égard de la trisection de l'arc et de l'angle. Car la solution de ce problème se trouve entièrement fondée sur *la quadrature du cercle* , puisque l'arc fondamental pour la trisection de tous les arcs et de leurs angles ,

est l'arc qui accompagne *la quadrature du cercle*, et dont le tiers forme la mesure d'un angle qui a pour *sinus* le quart du rayon. Or, il est évident que dans la solution générale du problème de la *trisection* des arcs et des angles qu'on peut proposer, toutes les opérations géométriques, employées dans les *équations*, ne peuvent jamais nous conduire à la connoissance de cet arc qui est particulier à *la quadrature du cercle*, et qui cependant nous est nécessaire afin de parvenir géométriquement à couper en trois parties égales tous les autres arcs et leurs angles en général qu'on peut supposer. Car, dans une *équation*, il s'agit de ramener l'inconnu à ce qui nous est connu, en comparant l'un avec l'autre et en cherchant leur différence. Mais, dans les problèmes du troisième degré, la grandeur qui décide toujours leur solution; nous reste entièrement inconnue et ne se trouve pas même énoncée par le problème. Il est donc impossible d'établir aucune comparaison entre les termes connus et entre cette grandeur inconnue qui n'a par elle-même aucun rapport avec ces termes que l'on connoît. Il faut donc conclure qu'il est de toute impossibilité de parvenir par le seul secours des *équations* à résoudre les problèmes du troisième degré. Mais on ne devoit pas en conclure l'impossibilité de leur solution géométrique; et voilà la cause de

l'erreur où sont tombés tous les savans. Le problème suivant achevera de nous convaincre de cette vérité.

PROBLÈME SEPTIÈME ET REMARQUABLE.

Trouver facilement et sur-le-champ autant de cubes que l'on veut qui soient doubles, quadruples, octuples etc., d'autres cubes donnés, et autant de quarrés que l'on veut qui soient proportionnels entr'eux comme les premier et troisième termes d'une progression géométrique, et autant de moyennes proportionnelles qu'on desire.

SOLUTION.

1°. Pour résoudre dans tous les cas possibles ce problème qui dépend entièrement des deux autres problèmes de la *duplication du cube* qui précèdent, il faut suivre la méthode fondamentale que nous avons prescrite. Décrivez d'abord la circonférence d'un cercle dont a sera le centre, *fig. 36*; construisez le triangle équilatéral abc , dont un angle sera situé au centre a . du sommet de l'angle c , abaissez la perpendiculaire cr , et du point u , centre de cette ligne, tirez la ligne uf perpendiculairement à ca , et de ce même point u , tirez la ligne ut perpendiculairement à cr . Après avoir trouvé par la solution du problème sixième précédent les deux moyennes proportionnelles entre le rayon

de votre cercle et sa moitié, alors vous prendrez avec le compas la grandeur exacte de l'une de ces moyennes proportionnelles (comme la ligne gl , *fig.* 35), et vous appliquerez cette grandeur sur la ligne perpendiculaire cr de votre triangle équilatéral que vous prolongerez du point u . Ainsi vous aurez la ligne uL égale à gl , et sur la ligne uf vous prendrez cette même grandeur qui vous donnera ul . Alors du point u , vous décrirez un cercle semblable au cercle a dont la circonférence passera au point m , et dont le centre sera u . Du point l prenez la grandeur lh qui sera encore égale à uL ; et du point h , tirez le rayon hm qui tombera sur la circonférence du cercle u . Or, je dis qu'après avoir prolongé d'une manière indéfinie les côtés hu et hm de l'angle h ; vous trouverez facilement et promptement sur les côtés de cet angle autant de cubes que vous voudrez, qui seront doubles, quadruples, octuples etc., d'autres cubes donnés.

(Vous observerez qu'en tirant du point m le rayon mu , et uM , et Mh , vous aurez le parallélogramme obliqu'angle $hmuM$, dont les quatre côtés seront égaux au rayon du cercle et dont la diagonale hu sera coupée par l'autre diagonale en deux parties, chacune égale à la ligne uL .

Soit la ligne hi le côté d'un cube dont il faut

trouver un autre cube double ou quadruplé; prenez d'abord, comme nous l'avons déjà dit, une ligne double dont le point i sera le milieu; et de ce point i , comme centre, décrivez le demi-cercle dont la circonférence passe par les points hlm , et du point o , médiatrice de la ligne hl , décrivez le demi-cercle qui passe par les points hln . Or, je dis que les quatre lignes hi , hn , hl , hm ; forment une progression géométrique, en sorte que le cube de hn est le double du cube dont le côté est hi , et hl est le côté d'un cube double de hn , et hm est le côté d'un cube double de hl . On a donc cette proportion géométrique $hi' : hn' :: hi : hm$. Soit la ligne hi côté d'un cube dont il faut trouver un autre cube quadruple. Suivez la même méthode que ci-dessus; et le troisième terme de la progression géométrique exprimera la grandeur de la ligne qui sera le côté d'un cube quadruple; et pour trouver un cube qui soit huit fois plus grand que le cube de hi , vous prendrez le quatrième terme. Ainsi hm sera le côté d'un cube octuple de hi .

En effet, si $hi = 2,500$, $hi' = 15,625$; mais la ligne hm est double de hi . Donc, sa grandeur $= 5. hm' = 125$. Or, cette valeur 125 est huit fois plus grande que celle de 15,625. Donc, etc. L'opération géométrique que nous venons de faire sur la ligne hi , peut se faire pareillement

à l'égard de toutes sortes de lignes, en sorte qu'on trouvera facilement la duplication de tous les cubes que l'on voudra.

2°. Nous n'insisterons point sur cette seconde partie du problème, parce qu'il est démontré dans tous les livres de géométrie que dans une progression géométrique le quarré du premier terme est au quarré du second, comme le premier est au troisième. Ainsi l'on a cette proportion $hi^2 : hn^2 : hi : hl$. C'est-à-dire, si $hi^2 = 6,250$, et $hn = 3,149,802$, etc.; $hn^2 = 9,921,256$, etc., et $hl = 3,968,50$, etc. On aura donc cette proportion $6,250 : 9,921,256$, etc., :: $2,500 : 3,968,50$, etc. Or, le produit des moyens est égal à celui des extrêmes; donc, etc.

3°. Il vous est facile d'avoir sur-le-champ autant de moyennes proportionnelles que vous voudrez, par le moyen de l'angle h ; car il ne s'agit que de tirer d'un côté de cet angle sur l'autre côté, une perpendiculaire qui parte de l'extrémité de la ligne donnée. C'est pourquoi, tirant du point I la perpendiculaire In , et du point n tirant nl , et du point l tirant lm , du point m tirant $m\nu$, et du point ν tirant la perpendiculaire νy , ainsi de suite, on auroit à l'infini des perpendiculaires qui seroient autant de moyennes proportionnelles, par une progression géométrique. Car tous les triangles qui se tiennent liés les uns avec les autres depuis le

point i jusqu'au point y , sont tous équiangles, puisqu'ils ont l'angle h , qui leur est commun, et puisqu'ils sont tous rectangles, et par conséquent semblables ayant leurs côtés homologues proportionnels; donc, etc.

Observation.

On peut avoir une solution encore plus simple de ce problème. Après avoir appliqué la moyenne proportionnelle gl sur la perpendiculaire cr , du point L il faut abaisser le rayon Ld , sur la ligne ut , ensorte que vous aurez le triangle rectangle $Lu d$. Prolongez les deux lignes Lu et Ld qui feront les côtés de l'angle L , et vous trouverez la duplication de tous les cubes que vous voudrez.

Voilà donc aujourd'hui la solution de ces fameux problèmes qui ont résisté aux efforts des plus grands génies de tous les siècles. Cela paroît bien étonnant. Il doit paroître encore bien surprenant que l'Institut National n'ait pas rendu public, depuis six mois, le jugement qu'il a déjà porté sur cet ouvrage en son particulier. Je demande la justice qui m'appartient.

Nota, Les circonstances présentes ne me permettent point de communiquer à l'Institut National mes travaux sur plusieurs phénomènes qui, dans ma campagne, ont fait l'objet constant de mes recherches. J'ai pris soin d'observer tous les météores qui ont paru dans nos contrées. L'aurore boréale du 30 vendémiaire dernier a excité à

PROBLÈME REMARQUABLE ET L'UN DES PLUS
BEAUX DE LA GEOMETRIE.

Trouver , par une méthode aussi simple que facile , autant de cubes que l'on veut qui soient doubles , quadruples , octuples etc. , d'autres cubes donnés , et autant de quarrés que l'on veut qui soient proportionnels entr'eux comme les premier et troisième termes d'une progression géométrique , et autant de moyennes proportionnelles qu'on desire.

SOLUTION.

Nous allons résoudre ce problème d'une manière tout-à-fait indépendante de la solution du sixième problème de la duplication du cube. Décrivez la circonférence du cercle a . Construisez le triangle équilatéral abc , dont les côtés soient égaux au rayon du cercle et dont un angle se trouve placé au centre a . Du sommet de l'angle c , abaissez la perpendiculaire cr que vous prolongerez fig. 37 d'une manière indéfinie au-delà du point c . Du point l , centre de la perpendiculaire cr , tirez la ligne lt perpendiculairement à cr , et laquelle ligne vous prolongerez d'un bout au-delà du point l jusqu'au point d de la circonférence du cercle a , et de l'autre extrémité d'une manière indéfinie. Sur cette même ligne prenez du point d deux fois le rayon du cercle, c'est-à-dire, son diamètre td ; et du

milieu de cette ligne au point m , comme centre, décrivez le demi-cercle $t h d$. Ainsi la perpendiculaire $c r$ prolongée se trouvera coupée par cette demi-circonférence au point h . Si de ce point h , vous tirez les deux cordes $h t$ et $h d$, vous aurez ce triangle rectangle $t h d$, dont $t d$ fera l'hypothénuse. Supposons $t d$ le diamètre $\equiv 10$. $t d - \cdot = 100$. donc, $h t^2$ plus, $h d^2 = 100$. En effet, $h t = 8,967,465$ etc. et $h t^2 = 80,415,435$ etc. $h d = 4,425,44$ etc. $h d^2 = 19,584,564$ etc. or, le produit de ces deux derniers quarrés $\equiv 99,999,99$ etc. c'est-à-dire, le quarré de l'hypothénuse. Donc etc. Après cette opération, vous abaisserez du sommet de l'angle droit h la perpendiculaire $h l$ sur l'hypothénuse $t d$. Alors le triangle se trouvera divisé en deux autres qui seront semblables, chacun, au grand triangle, et semblables entr'eux; et de plus, vous aurez quatre moyennes proportionnelles.

1^o. Je dis que les trois triangles, $t h d$, $h l t$, $h l d$, sont semblables. D'abord ils sont tous rectangles. L'angle d est commun aux deux triangles $t h d$, $h l d$. Donc ils ont tous leurs angles égaux et par conséquent semblables. L'angle t est aussi commun aux deux triangles $t h d$, $h l t$, ils sont donc semblables; et étant semblables à un troisième, ils sont tous les trois semblables entr'eux. Donc etc.

2^o. Je dis que l'on a quatre moyennes proportionnelles,

1°. La perpendiculaire lh est moyenne proportionnelle entre les deux segmens de l'hypothénuse. Car, on a cette proportion continue, $lt : lh :: lh : ld$. Donc, $lh^2 = lt$ multiplié par ld . Or, $lh = 3,968,502$, etc. $lh^2 = 15,749,01$, etc.; et $lt = 8,041,543$, etc., multiplié par $1,958,456$, etc., valeur de $ld = 15,759,01$, etc. Donc, lh est moyenne, etc. 2°. Le grand côté ht est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et son plus grand segment, c'est-à-dire, dt et lt ; mais $dt = 10$, et $lt = 8,041,543$, etc., on a donc cette proportion continue, $10 : 8,961,465$, etc., $:: 8,967,465$, etc. $:: 8,014,543$, etc. Or, le produit des moyens est égal à celui des extrêmes. Donc, etc. 3°. Le petit côté hd est encore moyen proportionnel entre l'hypothénuse entière et son plus petit segment. Car on a cette proportion continue $td : hd :: hd : ld$. C'est-à-dire, $10 : 4,425,44$, etc. $:: 4,424,44$, etc. $1,958,456$, etc. Or, le produit des moyens égale celui des extrêmes; donc etc. 4°. Enfin le segment du rayon ml est une moyenne proportionnelle entre l'excédent de lh sur le rayon md , et entre le reste du diamètre. Or, $lh = 3,968,502$, etc. et le rayon $5 - 3,968,502$, etc. $= 1,031,497$, etc. Ce dernier nombre est donc l'excédent de md sur lh ; et le diamètre moins cet excédent, $10 - 1,031,497$, etc. $= 8,968,502$, etc. Or, ces deux derniers nombres étant multipliés l'un par l'autre $= 9,250,986$, etc. Tirez la racine quarrée de ce dernier produit, vous aurez la valeur de ce segment du rayon $ml = 3,041,543$, etc. Donc, ml est moyen proportionel, etc.

Cela démontré, je dis que si du point m vous

élevez le rayon mh , et si du point h vous prolongez d'une manière indéfinie les deux lignes hl , mh ; vous trouverez facilement et promptement sur ces deux côtés de l'angle h autant de cubes que vous voudrez, qui seront doubles, quadruples, octuples, etc. d'autres cubes donnés, autant de quarrés et autant de moyennes proportionnelles que vous le desirerez, etc.

Soit la ligne hi le côté d'un cube dont il faut trouver un autre cubé double ou quadruple. (Voyez ci-dessus les pages 166, 167; et suivez toute la démonstration sur la même fig. 37.)

Remarque. Nous disons que ce problème est l'un des plus beaux de la géométrie, à cause de la grande simplicité qui l'accompagne, et à cause de la grande utilité que les savans en retireront. On peut le regarder comme le vrai pendant du quarré de l'hypothénuse. Le moindre apprentif en géométrie peut vérifier lui-même la vérité de la solution que nous en donnons, qui rend superflu le problème précédent. Tous ces grands problèmes sont les plus simples, ils dépendent d'un problème fondamental, et celui-ci dépend de la *quadrature du cercle* qui est la clef de toutes les autres découvertes. La solution de ce beau problème nous constate cette vérité d'une manière évidente. Est-il donc possible que MM. les membres de l'institut national aient tardé depuis plus de six mois à rendre public le jugement qu'ils ont déjà rendu en leur particulier sur cette grande découverte?

Nota. Les circonstances présentes ne me permettent point de communiquer à l'Institut National mes travaux sur plusieurs phénomènes qui, dans ma campagne, ont fait l'objet constant de mes recherches. J'ai pris soin d'observer tous les météores qui ont paru dans nos contrées. L'aurore boréale du 30 vendémiaire dernier a excité à

Paris toute mon attention. La vérité m'a obligé de faire connoître à M. Lalande que l'électricité ne pouvoit avoir aucune part à la cause de cette sorte de phénomènes. Je rends hommage aux talens de cet académicien, mais je dois hommage à la vérité.

Extrait du Journal de Paris, du 11 brumaire l'an XIII.

Au Rédacteur du Journal.

Monsieur, j'ai observé attentivement cette aurore boréale qui vient de paroître, et qui, sans doute, a été visible pour toute l'Europe septentrionale. Le spectacle de ce beau phénomène excite l'étonnement et l'admiration du peuple, et fait l'objet des recherches du philosophe. M. de Lalande nous certifie, d'un ton bien décisif, que cette aurore n'est que l'effet de l'électricité qui s'opère dans ces contrées enflammées de l'air. Je ne suis pas de son avis. J'en donne les raisons, d'après l'observation même de ce météore nouveau. J'ai remarqué que la partie lumineuse et blanche qui n'a pas changé sa couleur, se trouvoit toujours la partie la plus élevée dans toute l'étendue de l'espace que le phénomène occupoit. Première preuve qui détruit le jugement de l'astronome, puisque la partie qui étoit colorée d'un rouge de sang est restée constamment la plus basse. Comment arriveroit-il que le feu électrique, si rapide dans ses mouvemens, si varié dans ses formes, eût pu conserver, pendant plusieurs heures, toujours la même place? J'ai observé que ce phénomène, s'étant formé comme toutes les autres aurores, vers le nord, a décliné vers le couchant, de dix-huit degrés environ. Il est facile de comprendre que l'occident étant la dernière région qui rencontre l'atmosphère solaire, doit par conséquent être le plus imprégné de la matière qui la compose et doit attirer vers lui le météore. Seconde preuve contre la décision de l'astronome. J'observe encore que ce phénomène n'a paru que depuis que les secondes chaleurs ont totalement disparu. Pourquoi donc ces météores paroissent-ils plus souvent en hiver qu'en été? L'expérience prouve que c'est au milieu des grandes chaleurs de l'été que les particules de la matière électrique s'enflamment plus facilement dans les airs. C'est dans cette saison que les feux de l'éclair brillent souvent à nos yeux, et que les carreaux électriques de la foudre éclatent sur nos têtes. . . . etc., etc.

J'ai l'honneur d'être votre serviteur, LAUR.

De Paris, ce 8 brumaire.

Je ne me trouve en opposition avec le rapport de M. de Lamarck qu'à l'égard de la bande lumineuse et très-blanche qu'il place inférieurement à la partie colorée de rouge, et que j'assure être supérieure. Ce savant académicien me permettra de lui représenter que ces météores n'arrivent jamais, sans qu'il y ait dans l'atmosphère une espèce de brume répandue qui ressemble à un nuage. C'est toujours la partie la plus obscure et la plus épaisse qui prend la couleur rouge, tandis que la région de l'air, qui est la moins obscurcie, brille à nos yeux de cette lumière éclatante et érépusculaire.

Cette partie étant la plus légère doit donc être nécessairement la plus élevée. Dans la durée de ce phénomène il arrive ordinairement que la partie du nuage colorée de rouge s'entrouve en quelqu'endroit. Alors il laisse entrevoir nécessairement dans le lointain cette lumière blanche qui l'environne et qui nous semble être plus basse. Mais cela ne provient que du grand éloignement où nous l'apercevons, et c'est ce qui est arrivé dans le phénomène en question.

Du fameux problème des longitudes.

Depuis que la navigation s'est perfectionnée dans toute l'Europe, la marine est devenue un art qui embrasse une grande étendue de connaissances. La géométrie, l'astronomie, la géographie sont absolument nécessaires à l'homme de mer. C'est principalement depuis deux siècles que l'art du pilotage s'est élevé à ce haut degré de perfection où nous le voyons aujourd'hui parvenu. Mais ce n'est pas assez que de savoir diriger la route d'un vaisseau, il faut déterminer le point où il se trouve. Il manque encore au pilote un moyen sûr, exact, prompt et facile pour assigner quel est le point véritable que le vaisseau occupe sur le globe, et pour connoître du lieu de la mer où il est arrivé, la distance du lieu de la terre d'où il est parti. Tel est le sujet de ce fameux problème des *longitudes en mer* qui a exercé l'esprit de tous les savans depuis deux-cents ans.

EXTRAIT

DU JOURNAL DES ANNONCES

de la rue d'Argenteuil, du 20 Vendém^r an 13.

AU RÉDACTEUR.

MONSIEUR,

Je viens de lire l'ouvrage que vous avez annoncé dans votre journal, et qui contient une nouvelle découverte importante pour les sciences; j'ai été frappé de la vérité géométrique que l'auteur y démontre d'une manière aussi claire qu'évidente. Je n'aurois jamais pensé que la solution de ce grand problème, qui a été l'écueil de tous les savans, pût être donné avec une pareille simplicité; mais il en est de la démonstration de cette vérité géométrique, comme de celle des autres propositions évidentes par elles mêmes.

L'auteur a posé le fondement de sa solution sur un triangle dont les côtés sont entièrement égaux au rayon du cercle que l'on veut changer en un carré; et par la méthode qu'il nous enseigne, le côté de ce triangle *équilatéral* devient le côté d'un parallélogramme *obliqu'angle*, dont le centre est le point mathématique qui conduit à la solution du problème; car c'est ce point où se fait l'intersection des deux diagonales du parallélogramme, qui détermine la perpendiculaire du diamètre du cercle. L'auteur observe avec raison que dans ce problème

de la *quadrature* tout se résout par le *quart*. En effet, si l'on prend avec le compas le *quart* du diamètre du cercle *A* (figure 26°.) et si du centre *O* du parallélogramme l'on trace un cercle, ce cercle coupera chaque côté du parallélogramme en deux parties égales, dont chacune sera égale au *quart* du diamètre. C'est sur la perpendiculaire qui marque le *quart* du diamètre, qu'il faut prendre le point, *N*, débris de la *quadrature*; et la ligne qui passe par ce point donne *ys*, le *quart* de la ligne du carré égal au cercle. Enfin dans la figure 27^m., l'on a cette proportion géométrique, $dL-2 : aL-2 :: \frac{dL}{2} : ax$; c'est-à-dire : le carré du rayon du cercle est au *quart* de la surface du cercle, comme le *quart* du diamètre est au *quart* du *quart* de la circonférence. Il faut l'avouer : il n'y a rien dans la géométrie qui soit démontré plus évidemment ni plus clairement. Je ne puis m'empêcher de rendre ici la justice qui appartient à celui qui a fait une découverte ainsi intéressante. La solution de ce fameux problème se trouve fondée d'une manière inébranlable sur la vraie pierre triangulaire, et subsistera dans tous les siècles. (Voyez la figure ci-jointe pour démonstration.)

29. C'est avec la même évidence et la même clarté, que l'auteur nous démontre que le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre est *incommensurable*, puisqu'il nous prou-

ve que tous les points constitutifs de la ligne circulaire sont les premiers points d'autant de lignes diagonales que le corps, mu circulairement, auroit infailliblement parcourus, s'il n'eut pas été poussé sans cesse et à chaque point par les deux forces centripète et centrifuge. En effet, il nous découvre que toute diagonale d'un carré est la demi-circonférence d'un cercle égal à un carré inscrit. 3°. L'auteur nous donne le vrai rapport de la circonférence du cercle à son diamètre, lequel est un rapport arithmétique composé du diamètre lui-même, de sa moitié, de son *quart*, et de ce même *quart*, etc. C'est ainsi que dans ce beau problème tout se résout par le *quart* du diamètre, soit dans la proportion géométrique, soit dans le rapport arithmétique. 4°. Le mécanisme du cercle et du carré se montre à nos yeux d'une manière bien simple. Qui auroit cru que toute ligne du côté d'un carré se trouve essentiellement composé du rayon du cercle dont ce carré est le carré? Qui auroit cru que chaque ligne des quatre côtés du carré donne naturellement le quart de la surface du cercle, comme le carré en son entier donne toute la surface de ce même cercle? Mais ce que je trouve de plus frappant dans tout cela, c'est de voir que ces découvertes, qui ont été vainement tentées par les savans de tous les pays et de tous les siècles, aient été

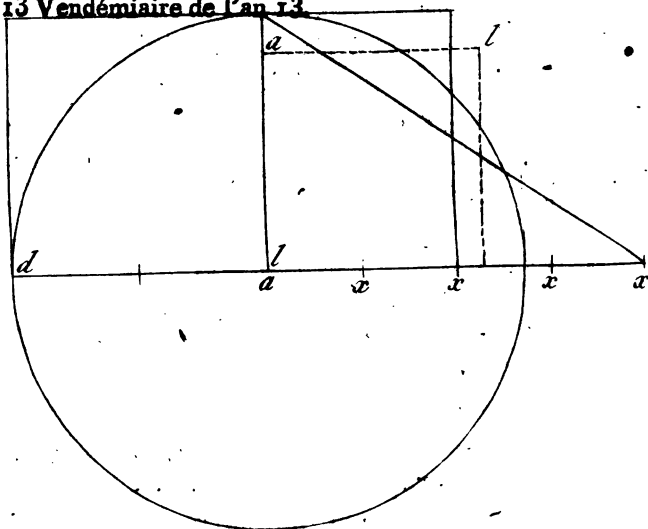
(4)

réservees pour le siècle de *Bonaparte*, à l'instant même où sa tête va recevoir la couronne impériale.

Votre serviteur,

D...., ancien professeur d'un collège public

Le 13 Vendémiaire de l'an 13.

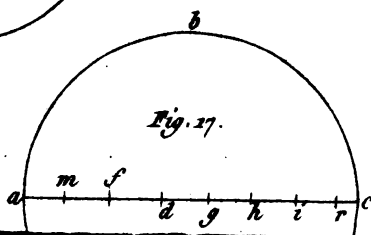
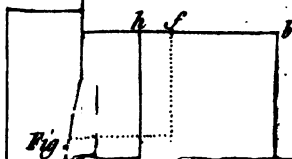
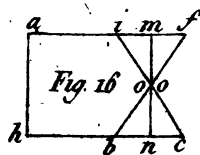
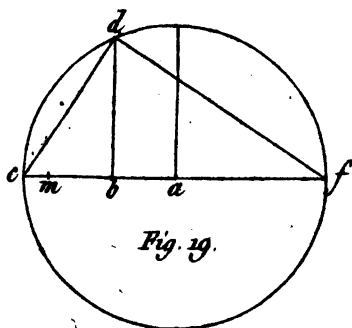
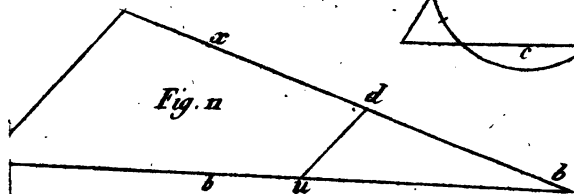
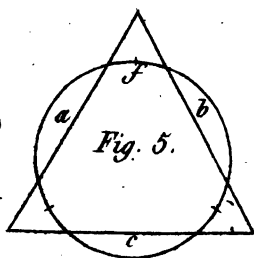
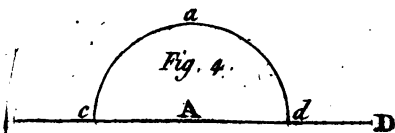


Voici la raison géométrique qui a empêché tous les savans de parvenir à la solution du fameux problème de la *Quadrature*.

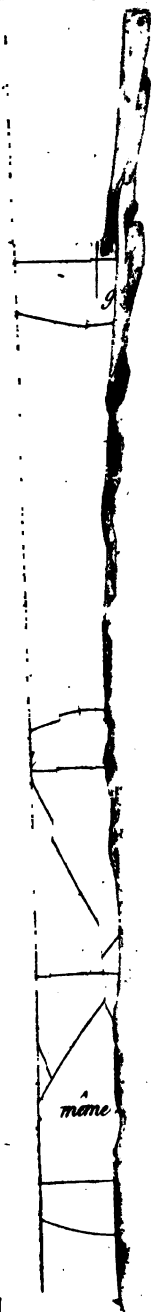
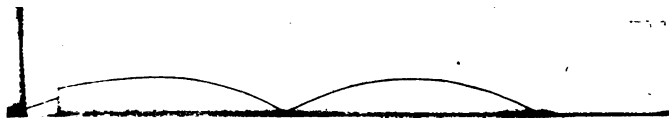
C'est parce qu'ils ont tous cherché une ligne, tandis qu'il ne fallait chercher qu'un seul point mathématique, parce qu'il n'y a point de rapport entre aucune ligne droite et la ligne circulaire, ainsi qu'il est prouvé dans l'Ouvrage.

L'Auteur donnera la *Quadrature des arcs*, et des *secteurs du cercle*, et mettra le sceau à l'une des plus belles découvertes de l'esprit humain, qui lui a coûté neuf années de travail.

Le lecteur observera que tous les théorèmes et problèmes qui sont établis dans cet ouvrage, se trouvent liés le plus étroitement avec la solution géométrique de la *Quadrature* qui donne la mesure arithmétique. C'est pourquoi toutes les démonstrations deviennent les plus rigoureuses, soit en nombres, soit en lignes.



et pour toutes les démonstrations deviennent les p...
ses, soit en nombres, soit en lignes.



0

name



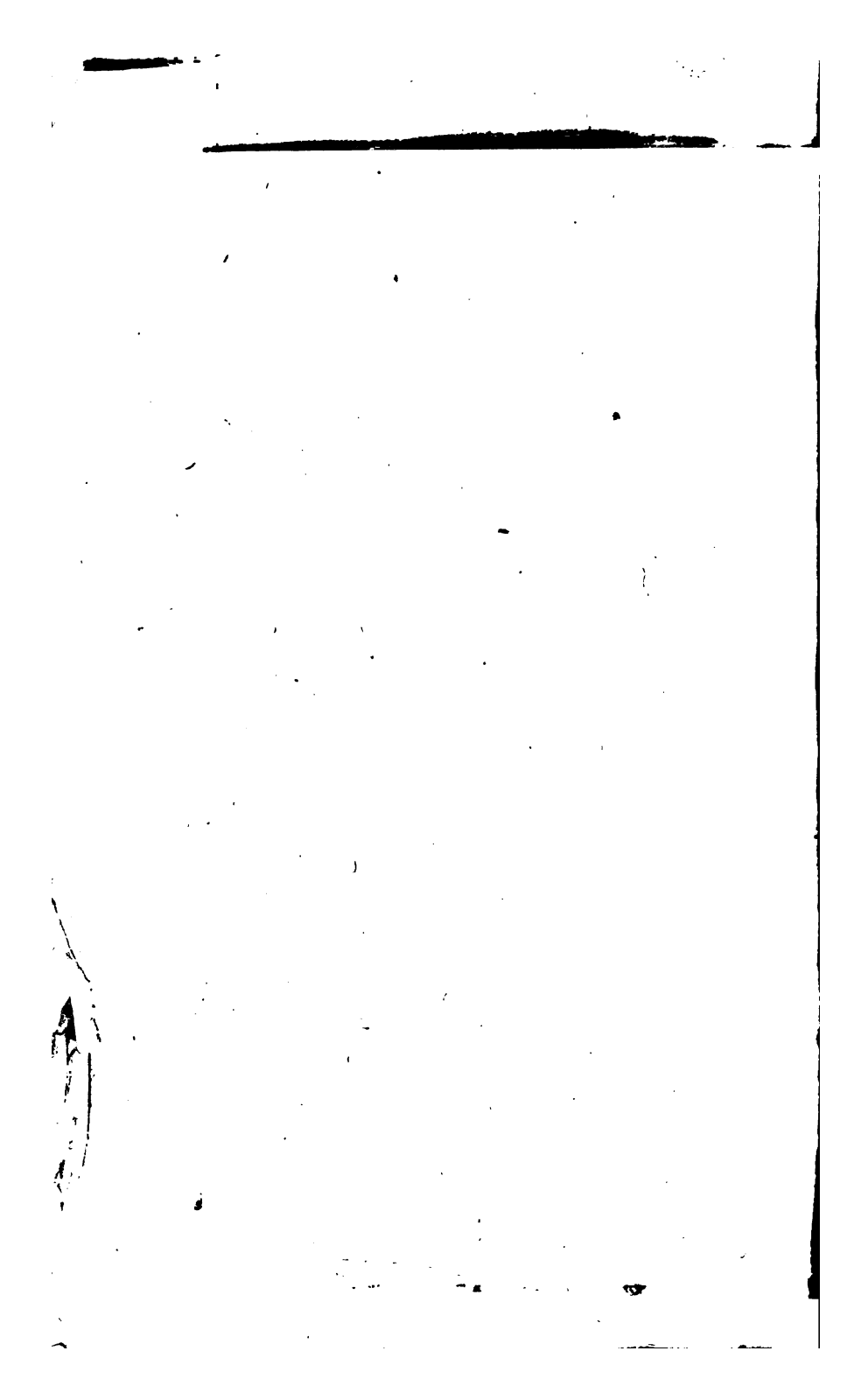


Fig. 28.
Fig. 29.

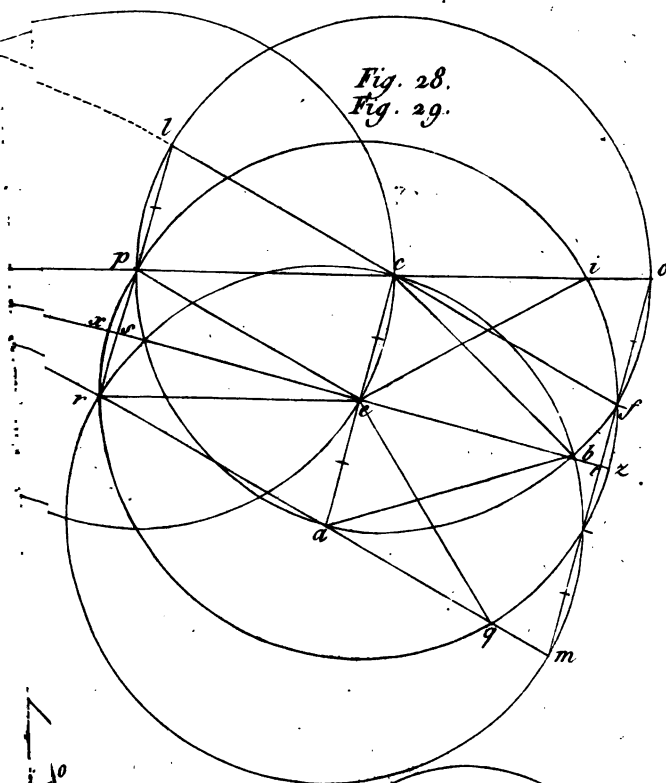
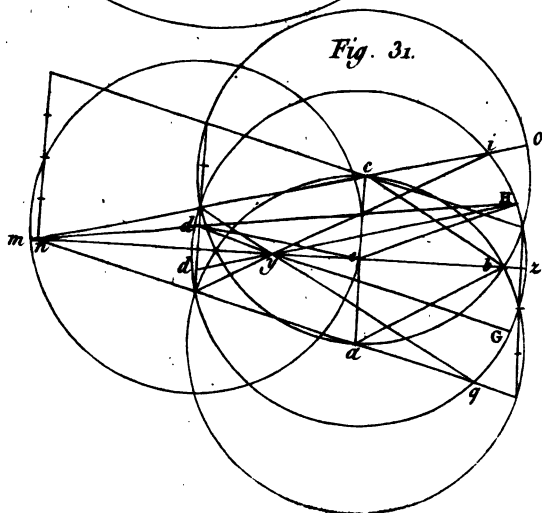


Fig. 31.



7

Fig. 34.

M

g

c

x

b

n

r

m



